

ISSN 2686-679X

# ВЕСТНИК РГУ

*Серия*  
«Информатика.  
Информационная безопасность.  
Математика»

Научный журнал

# RSUH/RGGU BULLETIN

“Information Science.  
Information Security. Mathematics”  
*Series*

Academic Journal

Основан в 2018 г.  
Founded in 2018

**1**  
2021

RSUH/RGGU BULLETIN. “Information Science. Information Security. Mathematics” Series Academic Journal

There are 4 issues of the printed version of the journal a year.

Founder and Publisher  
Russian State University for the Humanities (RSUH)

RSUH/RGGU BULLETIN. “Information Science. Information Security. Mathematics” series is included: in the Russian Science Citation Index; in the List of leading scientific journals and other editions for publishing PhD research findings peer-reviewed publications fall within the following research area:

**20.00.00** Informatics

**81.03.29** Information security, data protection

**27.00.00** Mathematics

*Objectives and areas of research*

RSUH/RGGU BULLETIN. “Information Science. Information Security. Mathematics” series publishes the results of research by scientists from RSUH and other universities and other Russian and foreign academic institutions. The areas covered by contributions include theoretical and applied computer science, up-to-date IT, means and technologies of information protection and information security as well as the issues of theoretical and applied mathematics including analytical and imitation models of different processes and objects. Special emphasis is put on articles and reviews covering research in indicated directions in the areas of social and humanitarian problems and also issues of personnel training for these directions.

RSUH/RGGU BULLETIN. “Information Science. Information Security. Mathematics” series is registered by Federal Service for Supervision of Communications Information Technology and Mass Media. 25.05.2018, reg. No. FS77-72977

Editorial staff office: 6, Miusskaya sq., Moscow, Russia, 125993

tel: +7 (916) 250-90-85

e-mail: adkozlov@mail.ru

ВЕСТНИК РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика»

Научный журнал

Выходит 4 номера печатной версии журнала в год.

Учредитель и издатель – Российский государственный гуманитарный университет (РГГУ)

ВЕСТНИК РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика» включен: в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ); в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по следующим научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:

**20.00.00** Информатика

**81.93.29** Информационная безопасность, защита информации

**27.00.00** Математика

### *Цели и область*

В журнале «Вестник РГГУ», серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика» публикуются результаты научных исследований ученых и специалистов РГГУ, а также других университетов и научных учреждений России и зарубежных стран. Направления публикаций включают теоретическую и прикладную информатику, современные информационные технологии, методы, средства и технологии защиты информации и обеспечения информационной безопасности, а также проблемы теоретической и прикладной математики, включая разработку аналитических и имитационных моделей процессов и объектов различной природы. Особое внимание уделяется статьям и обзорам, посвященным исследованиям по указанным направлениям в области социальных и гуманитарных проблем, а также вопросам подготовки кадров по соответствующим специальностям для данных направлений.

ВЕСТНИК РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика» зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций 25.05.2018 г., регистрационный номер ПИ № ФС77-72977.

Адрес редакции: 125993, Россия, Москва, Миусская пл., 6

Тел: +7 (916) 250-90-85

электронный адрес: adkozlov@mail.ru

Founder and Publisher

Russian State University for the Humanities (RSUH)

Editor-in-chief

*V.V. Arutyunov*, Dr. of Sci. (Engineering), Russian State University for the Humanities (RSUH), Moscow, Russian Federation

Editorial Board

*V.K. Zharov*, Dr. of Sci. (Pedagogy), professor, Russian State University for the Humanities (RSUH), Moscow, Russian Federation (*deputy editor-in-chief*)

*A.D. Kozlov*, Cand. of Sci. (Computer Science), associate professor, Russian State University for the Humanities (RSUH), Moscow, Russian Federation (*executive secretary*)

*Sh.A. Alimov*, Dr. of Sci. (Physics and Mathematics), professor, academician, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Republic of Uzbekistan

*M.N. Aripov*, Dr. of Sci. (Physics and Mathematics), professor, National University of Uzbekistan, Tashkent, Republic of Uzbekistan

*G.S. Ivanova*, Dr. of Sci. (Computer Science), professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

*V.M. Maximov*, Dr. of Sci. (Physics and Mathematics), professor, Russian State University for the Humanities (RSUH), Moscow, Russian Federation

*I.Yu. Ozhigov*, Dr. of Sci. (Physics and Mathematics), professor, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

*E.A. Primenko*, Cand. of Sci. (Physics and Mathematics), professor, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

*S.M. Sokolov*, Dr. of Sci. (Physics and Mathematics), professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation

*Sh.K. Formanov*, Dr. of Sci. (Physics and Mathematics), professor, academician, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Republic of Uzbekistan

*V.A. Tsvetkova*, Dr. of Sci. (Engineering), professor, Library for Natural Sciences of the RAS, Moscow, Russian Federation

Executive editor:

*A.D. Kozlov*, Cand. of Sci. (Computer Science), associate professor (RSUH)

Учредитель и издатель

Российский государственный гуманитарный университет (РГГУ)

Главный редактор

*В.В. Арутюнов*, доктор технических наук, Российский государственный гуманитарный университет (РГГУ), Москва, Российская Федерация

Редакционная коллегия

*В.К. Жаров*, доктор педагогических наук, профессор, Российский государственный гуманитарный университет (РГГУ), Москва, Российская Федерация (*заместитель главного редактора*)

*А.Д. Козлов*, кандидат технических наук, доцент, Российский государственный гуманитарный университет (РГГУ), Москва, Российская Федерация (*ответственный секретарь*)

*Ш.А. Алимов*, доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Узбекистана, Ташкент, Республика Узбекистан

*М.М. Арипов*, доктор физико-математических наук, профессор, Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Республика Узбекистан

*Г.С. Иванова*, доктор технических наук, профессор, Московский государственный университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

*В.М. Максимов*, доктор физико-математических наук, профессор, Российский государственный гуманитарный университет (РГГУ), Москва, Российская Федерация

*И.Ю. Ожигов*, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (МГУ), Москва, Российская Федерация

*Э.А. Применко*, кандидат физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (МГУ), Москва, Российская Федерация

*С.М. Соколов*, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М.И. Келдыша РАН, Москва, Российская Федерация

*Ш.К. Форманов*, доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Узбекистана, Ташкент, Республика Узбекистан

*В.А. Цветкова*, доктор технических наук, профессор, Библиотека по естественным наукам РАН, Москва, Российская Федерация

Ответственный за выпуск:

*А.Д. Козлов*, кандидат технических наук, доцент (РГГУ)

## CONTENTS

### Information Science

---

- Mariya V. Vinogradova, Aleksei A. Maksakov,  
Aleksei E. Samokhvalov*  
Recording the labor intensity of workers employed  
in hazardous and harmful conditions in automated system  
for modeling and controlling the loss of working time from diseases . . . . . 8
- Sof'ya A. Serebryakova, Mikhail V. Filippov*  
Development of an algorithm for embedding and extracting digital  
watermarks for video files of the AVI format . . . . . 20
- Ulugbek Yu. Tuliev, Musulmon Ya. Lolaev*  
On the formation of space for the description of thematic documents . . . . . 35

### Information Security

---

- Andrei V. Gavrilenko*  
Distance learning and information security . . . . . 51

### Mathematics

---

- Ekaterina O. Andronikova*  
On geometric properties of the pseudo-Riemannian manifold  
of the Gödel Universe . . . . . 66
- Andrei N. Bogdanov*  
My G.G. Cherny. Soldier's path. Some problems  
of aeromechanics and gas dynamics in the 20<sup>th</sup> century.  
Analytics classic . . . . . 81

## СОДЕРЖАНИЕ

### **Информатика**

---

- Мария В. Виноградова, Алексей А. Максаков,  
Алексей Э. Самохвалов*  
Учет интенсивности труда работников, занятых  
в опасных и вредных условиях, в автоматизированной  
системе моделирования и контроля потерь рабочего времени  
от заболеваний ..... 8
- Софья А. Серебрякова, Михаил В. Филиппов*  
Разработка алгоритма встраивания и извлечения  
цифровых водяных знаков для видеофайлов AVI-формата ..... 20
- Улугбек Ю. Тулиев, Мусулмон Я. Лолаев*  
О формировании пространства  
для описания тематических документов ..... 35

### **Информационная безопасность**

---

- Андрей В. Гавриленко*  
Дистанционное обучение и информационная безопасность ..... 51

### **Математика**

---

- Екатерина О. Андроникова*  
О геометрических свойствах псевдориманова многообразия  
Вселенной Гёделя ..... 66
- Андрей Н. Богданов*  
Мой Г.Г. Чёрный. Путь солдата. Некоторые задачи аэромеханики  
и газовой динамики в XX в. Классика аналитики ..... 81

УДК 004.9:331

DOI: 10.28995/2686-679X-2021-1-8-19

Учет интенсивности труда работников,  
занятых в опасных и вредных условиях,  
в автоматизированной системе моделирования  
и контроля потерь рабочего времени  
от заболеваний

Мария В. Виноградова

*Московский государственный технический университет  
им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия, [vinogradova.m@bmstu.ru](mailto:vinogradova.m@bmstu.ru)*

Алексей А. Максаков

*Московский государственный технический университет  
им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия, [256m@mail.ru](mailto:256m@mail.ru)*

Алексей Э. Самохвалов

*Московский государственный технический университет  
им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия, [samox@bmstu.ru](mailto:samox@bmstu.ru)*

*Аннотация.* Для современных информационных систем моделирования и контроля трудовых ресурсов, а также в целях обеспечения качества проведения специальной оценки условий труда требуется изучить влияние интенсивности труда и адаптировать методики анализа непроизводительных потерь от временной нетрудоспособности работников. Авторы дополнили ранее представленную математическую модель непроизводительных потерь рабочего времени от заболеваний и производственных травм работников, занятых в опасных и вредных условиях труда с нормальной и повышенной интенсивностью. Также устранены недостатки автоматизированной системы моделирования на основе потоковой модели, которые приводили к искажению результатов исследования. Учтено влияние интенсивности труда во вредных производственных условиях на здоровье человека. Разработчиками проведены эксперименты на данных автоматизированной системы моделирования (АСМ) управления строительным предприятием, работники которого заняты на строительстве магистральных газопроводов в различных регионах России. Сформулирована практическая значимость результатов исследований: внесенные изменения в систему существенно повышают качество специальных оценок условий

---

© Виноградова М.В., Максаков А.А., Самохвалов А.Э., 2021



труда (СОУТ), регулярно проводимых на предприятиях, а также качество нормирования труда. Применение представленной системы моделирования особенно актуально в условиях пандемии коронавируса, когда необходимо точно определять группы риска работников.

*Ключевые слова:* моделирование, трудовые ресурсы, условия труда, факторы производственной среды, оценочные модели

*Для цитирования:* Виноградова М.В., Максаков А.А., Самохвалов А.Э. Учет интенсивности труда работников, занятых в опасных и вредных условиях, в автоматизированной системе моделирования и контроля потерь рабочего времени от заболеваний // Вестник РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика». 2021. № 1. С. 8–19. DOI: 10.28995/2686-679X-2021-1-8-19

## Recording the labor intensity of workers employed in hazardous and harmful conditions in automated system for modeling and controlling the loss of working time from diseases

Mariya V. Vinogradova

*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia,  
vinogradova.m@bmstu.ru*

Aleksei A. Maksakov

*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia,  
256m@mail.ru*

Aleksei E. Samokhvalov

*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia,  
samox@bmstu.ru*

*Abstract.* For modern information systems for modeling and monitoring the labor resources, as well as to ensure the quality of a special assessment of working conditions, it is necessary to study the impact of the labor intensity and adapt methods for analyzing the non-production losses from temporary disability of employees. The authors supplemented the previously presented mathematical model for non-productive losses of working time from diseases and industrial injuries of workers engaged in dangerous and harmful working conditions with normal and increased intensity. Also, the shortcomings of the automated modeling system based on the flow model, which led to distortion of the research results, were eliminated. The influence of the labor intensity in harmful production conditions on human health is taken into account. The developers conducted experiments with the data of the automated information

management system of a construction enterprise, where employees are engaged in the construction of main gas pipelines in various regions of Russia. The practical significance of the research results is formulated: the changes made to the system significantly improve the quality of special assessments of working conditions, regularly conducted at enterprises, as well as the quality of the labor norms setting. The application of the presented modeling system is especially relevant in the context of the coronavirus pandemic, when it is necessary to accurately determine the risk groups of workers.

*Keywords:* modeling, labor resources, working conditions, factors of the working environment, evaluation models

*For citation:* Vinogradova, M.V., Maksakov, A.A. and Samokhvalov, A.E. (2021), "Recording the labor intensity of workers employed in hazardous and harmful conditions in automated system for modeling and controlling the loss of working time from diseases", *RSUH/RGGU Bulletin. "Information Science. Information Security. Mathematics" Series*, no. 1, pp. 8–19, DOI: 10.28995/2686-679X-2021-1-8-19

## *Введение*

Корректировка математической модели потерь предприятия от временной нетрудоспособности работников и ее программная реализация направлены «на снижение количества рабочих мест с вредными и опасными условиями труда, а также на создание эффективных рабочих мест с безопасными условиями труда»<sup>1</sup>. В Концепции долгосрочного социально-экономического развития РФ декларирован запрос на исследование фактических данных о производственной экосистеме. Авторы добавляют такой важный параметр, как интенсивность труда, динамика которой не учитывается в современной системе оценки условий труда.

Математическая модель оценки потерь предприятия от временной нетрудоспособности работников представляет собой марковский процесс с дискретным временем. Увеличено конечное множество состояний системы, интенсивности переходов между которыми зависят от интенсивности работы во вредных условиях труда. Соответственно расширена система параметров модели, отражающая влияние производственных факторов выбранного класса (подкласса) опасности.

---

<sup>1</sup> Распоряжение Правительства РФ от 17.11.2008 № 1662-р «О концепции долгосрочного социально-экономического развития РФ на период до 2020 года».

Проведенные с применением разработанной автоматизированной системы моделирования (АСМ) исследования, основанные на данных крупного строительного предприятия, более 20% кадрового состава которого составляют работники, занятые во вредных производственных процессах, выявили существенный рост производственных потерь от заболеваний при увеличении интенсивности труда. Полученный результат полезен для модернизации системы нормирования труда в организации.

В процессе апробации АСМ и контроля непроизводственных потерь рабочего времени от заболеваний и производственных травм работников, занятых в опасных и вредных условиях труда, установлено, что матрицы интенсивностей переходов содержат «усредненные» значения, искажающие результаты специальных оценок условий труда (СОУТ). Действующие на предприятии нормативы определяют «нормальный» режим труда и отдыха электросварщиков, дефектоскопистов, газорезчиков и других «вредников». В условиях максимально сжатых сроков строительства время отдыха между рабочими операциями существенно сокращено, вредное воздействие на организм человека носит более длительный характер. Следует учитывать, что строительство таких крупных объектов, как трубопроводы, производится за несколько месяцев или лет. Работники, занятые во вредных условиях, трудятся с увеличенной интенсивностью весьма продолжительное время, что, как правило, не учитывается при проведении специальных оценок условий труда.

Авторы исправили предложенный ими ранее метод оценки качества проводимых специальных оценок условий труда, основанный на анализе потерь рабочего времени предприятия от заболеваний и производственных травм работников, участвующих в производственных процессах в опасных и вредных условиях труда.

Цель работы – доработать математическую модель и базовую концепцию АСМ и контроля непроизводственных потерь рабочего времени от заболеваний и производственных травм работников, занятых в опасных и вредных условиях труда, с учетом интенсивности выполняемых ими производственных функций.

### *Актуальность работы*

Федеральный закон от 28.12.2013 № 426-ФЗ «О специальной оценке условий труда» устанавливает четыре класса условий труда по степени вредности и (или) опасности: оптимальные, допустимые, вредные и опасные. Определение класса для рабочего места проводится аттестационной комиссией с учетом установленных на

предприятию норм труда и отдыха. Однако в режиме увеличения темпов строительства эти нормы не соблюдаются. В лучшем случае увеличение интенсивности труда компенсируется работодателем в форме соответствующей надбавки к заработной плате, но нарушает права работника, закрепленные, например, пенсионным законодательством.

Рассмотренная в статье усовершенствованная концепция построения АСМ и контроля непроизводственных потерь рабочего времени от заболеваний и производственных травм сотрудников, занятых в опасных и вредных условиях труда, по мнению авторов, может быть успешно интегрирована в Федеральную государственную информационную систему учета результатов проведения СОУТ<sup>2</sup> с целью защиты трудовых прав работников.

### *Описание математической модели*

В работах [Виноградова, Максаков, Самохвалов 2019a] и [Виноградова, Максаков, Самохвалов 2019b] представлена созданная АСМ потерь рабочего времени предприятия от заболеваний и производственных травм работников, основной целью которой является оценка качества проводимых на рабочих местах предприятия СОУТ. Математическая модель представляет собой марковский процесс с дискретным временем, конечным множеством состояний, заданной матрицей допустимых переходов между ними [Исмагилова, Франц, Кульмухаметов 2017]. Интенсивности переходов вычисляются на основании статистических данных информационной системы управления персоналом предприятия. Вероятности переходов описаны с помощью полиномиальных линий трендов аппроксимации. В ходе апробации математической модели были поставлены новые задачи для исследования: определить влияние интенсивности труда работников, занятых в опасных и вредных условиях, на матрицы интенсивностей переходов из одного состояния системы в другое.

Ранее состояние работника было представлено в виде кортежа данных  $S = (W, K, T, V, VP)$ , где  $W$  – статус «работает», «уволен»,  $K$  – классификация условий труда;  $T$  – трудоспособность,  $V$  – стаж работы (лет) во вредных условиях труда,  $VP$  – стаж работы (лет) во вредных условиях труда на обследуемом предприятии. Переходы

---

<sup>2</sup>Федеральная государственная информационная система учета результатов проведения СОУТ [Электронный ресурс]. URL: <http://akot.gosmintrud.ru/> (дата обращения 19 декабря 2020).

системы из одного состояния в другое определены матрицей допустимости. На рис. 1 продемонстрирован упрощенный пример такой матрицы. Значение 0 означает, что переход невозможен, 1 – переход возможен.

Состояния	{0,0,0}	{1,1,0}	{1,1,1}	{1,1,2}	{1,1,3}	{1,2,0}	{1,2,1}	{1,2,2}	{1,2,3}	{1,3,1,0}	{1,3,1,1}	{1,3,1,2}	{1,3,1,3}	{1,3,2,0}	{1,3,2,1}	{1,3,2,2}	{1,3,2,3}
{0,0,0}	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
{1,1,0}	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
{1,1,1}	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
{1,1,2}	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
{1,1,3}	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
{1,2,0}	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
{1,2,1}	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
{1,2,2}	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
{1,2,3}	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
{1,3,1,0}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
{1,3,1,1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
{1,3,1,2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
{1,3,1,3}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
{1,3,2,0}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1
{1,3,2,1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1
{1,3,2,2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
{1,3,2,3}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1

Рис. 1. Матрица допустимости переходов между состояниями системы

Матрица интенсивностей L переходов работников из одного состояния S (W<sub>i</sub>, K<sub>i</sub>, T<sub>i</sub>, V<sub>i</sub>, VP<sub>i</sub>) в другое S (W<sub>j</sub>, K<sub>j</sub>, T<sub>j</sub>, V<sub>j</sub>, VP<sub>j</sub>) построена с учетом фактора сезонности заболеваний, общего стажа работы во вредных условиях и стажа работы во вредных условиях на обследуемом предприятии.

Распределение численности работников по состояниям во времени можно представить в виде системы уравнений:

$$N_i(t + 1) = N_i(t) - \sum_{j \in M_i} \lambda_{i,j}(t) N_i(t) + \sum_{j \in P_i} \lambda_{j,i}(t) N_j(t), \quad (1)$$

где: N<sub>i</sub>(t) – численность работников в i-м состоянии в момент времени t;

M<sub>i</sub> – множество индексов состояний, в которые существует переход из i-го состояния;

P<sub>i</sub> – множество индексов состояний, из которых существует переход в i-е состояние.

Авторы данного исследования утверждают, что интенсивность λ<sub>i, j</sub>(t) перехода работников из i-го состояния в j-е необходимо определять не только по номинальному классу вредных факторов, но и с учетом интенсивности труда во вредных условиях.

Путем сравнения фактического и планового объемов работ за период (год) вычисляется коэффициент интенсивности труда:

$$I = V_{\text{факт}} / V_{\text{план}}, \quad (2)$$

где:  $V_{\text{факт}}$  – фактически выполненный объем работы за период;  
 $V_{\text{план}}$  – запланированный объем работы за период.

Например, для электросварщиков регистрируется общая длина сварного шва за смену и сравнивается с нормативом.

Для простоты описания авторы выделили две категории работников:

- 1) занятые с нормальной интенсивностью труда,  $I < 1,10$ ;
- 2) занятые с повышенной интенсивностью труда,  $I \geq 1,10$ .

В кортеж данных  $S$  добавлен атрибут  $I$ , отражающий интенсивность труда.

На рис. 2 наглядно представлено, что интенсивность перехода из состояния «здоров» в состояние «болен» и длительность состояния «болен» без учета интенсивности труда не отражают реального влияния вредных факторов на здоровье человека. Частота и длительность заболеваний существенно возрастают с увеличением вредной нагрузки.

Математическая модель дополнена следующими показателями.

Потери рабочего времени от временной нетрудоспособности работников, занятых в условиях труда класса (подкласса)  $k$  с нормальной интенсивностью, за интервал времени  $(t_1, t_2)$  в человеко-днях рассчитываются по формуле:

$$T_{\text{норм}k} = \sum_{t=t_1}^{t_2} \sum_{j \in \text{Ннорм}k} N_j(t), \quad (3)$$

где  $\text{Ннорм}k$  – множество индексов состояний, содержащих значение  $I < 1,10$ , значение  $k$  атрибута  $K$ , значение 1 или 2 атрибута  $T$  (трудоспособность).

Потери рабочего времени от временной нетрудоспособности работников, занятых в условиях труда класса (подкласса)  $k$  с повышенной интенсивностью, за интервал времени  $(t_1, t_2)$  в человеко-днях рассчитываются по формуле:

$$T_{\text{повыш}k} = \sum_{t=t_1}^{t_2} \sum_{j \in \text{Нповыш}k} N_j(t), \quad (4)$$

где  $\text{Нповыш}k$  – множество индексов состояний, содержащих значение  $I \geq 1,10$ , значение  $k$  атрибута  $K$ , значение 1 или 2 атрибута  $T$  (трудоспособность).

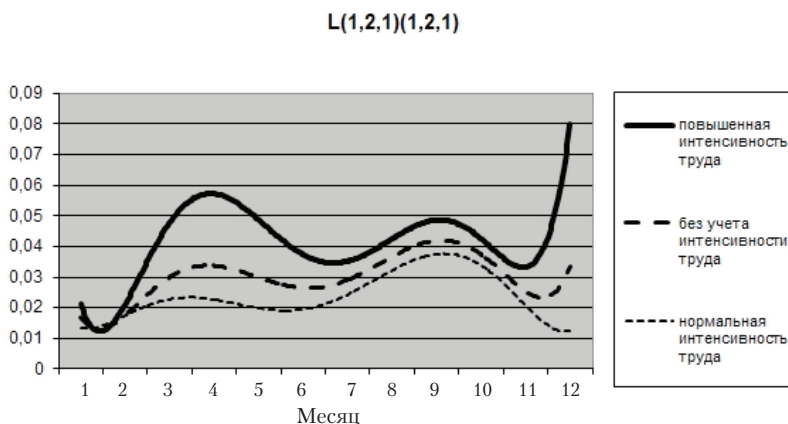
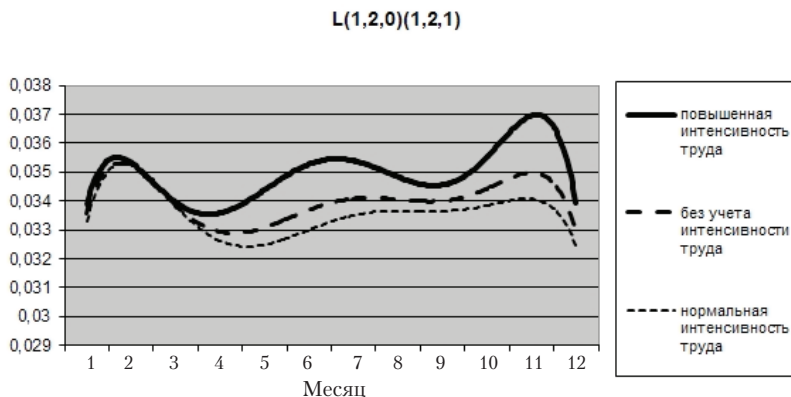


Рис. 2. Кривые аппроксимации интенсивностей переходов при нормальной и повышенной интенсивностях труда

Доля потерь от заболеваний и производственных травм работников, занятых в условиях труда класса (подкласса)  $k$  с нормальной интенсивностью, от общего фонда рабочего времени работников этой категории вычисляется по формуле:

$$D_{нормк} = T_{нормк} / F_{нормк}, \quad (5)$$

где  $F_{нормк}$  – суммарный фонд рабочего времени занятых в условиях труда класса (подкласса)  $k$  с нормальной интенсивностью.

Аналогично вычисляется доля потерь от заболеваний и производственных травм работников, занятых в условиях труда класса (подкласса)  $k$  с повышенной интенсивностью.

Параметры модели отражающего влияние вредных и опасных производственных факторов класса (подкласса)  $k$  представлены следующим набором:

при нормальной интенсивности труда:

$$M_{нормk} = D_{нормk} / D_{норм1}, \quad (6)$$

при повышенной интенсивности труда:

$$M_{повышk} = D_{повышk} / D_{норм1} \quad (7)$$

Исследование повторно проводилось на данных автоматизированной информационной системы управления строительным предприятием, работники которого заняты на строительстве магистральных газопроводов в различных регионах России. Динамика доли непроизводственных потерь от заболеваний и производственных травм работников, занятых в условиях труда классов 1 и 2, от фондов рабочего времени этих работников отражена на рис. 3 в столбцах D1 и D2. Параметр D2 разделен на два уровня интенсивности труда: нормальная и повышенная. На основании этих показателей вычислены столбцы M2. В столбце «Увеличение» мы наблюдаем положительные значения, означающие повышенный уровень заболеваемости работников, трудящихся с большей интенсивностью, по сравнению с уровнем заболеваемости работников, занятых в условиях с нормальной интенсивностью труда.

Из расчетной таблицы видно, что общий уровень непроизводственных потерь от болезней и производственных травм «вредников», которые постоянно трудятся с повышенной интенсивностью, превышает соответствующий уровень при «оптимальных» условиях труда более чем в 2 раза. Такой вывод требует серьезной корректировки организации труда работников, занятых во вредных условиях, разработки предельных значений временных промежутков выполнения производственных операций и отдыха между ними. Сравнение расчетных показателей можно использовать совместно с методом выборочной проверки качества действующих норм [Кулькова 2015].



Месяц	D1		D2		M2		Увеличение
	Нормальная	Нормальная	Повышенная	Нормальная	Повышенная		
январь	0,0136	0,0123	0,0206	0,9044	1,5147	0,6103	
февраль	0,0144	0,0125	0,0321	0,8681	2,2292	1,3611	
март	0,0165	0,0227	0,0331	1,3758	2,0061	0,6303	
апрель	0,0221	0,0249	0,0606	1,1267	2,7421	1,6154	
май	0,0225	0,0199	0,0456	0,8844	2,0267	1,1422	
июнь	0,0170	0,0081	0,0516	0,4765	3,0353	2,5588	
июль	0,0130	0,0338	0,0173	2,6000	1,3308	-1,2692	
август	0,0267	0,0204	0,0601	0,7640	2,2509	1,4869	
сентябрь	0,0276	0,0424	0,0673	1,5362	2,4384	0,9022	
октябрь	0,0190	0,0265	0,0507	1,3947	2,6684	1,2737	
ноябрь	0,0164	0,0240	0,0360	1,4634	2,1951	0,7317	
декабрь	0,0173	0,0097	0,0877	0,5607	5,0694	4,5087	

*Рис. 3.* Расчет параметров модели, отражающих влияние вредных производственных факторов второго класса  $M_2$  с учетом интенсивности труда

### *Заключение*

Результаты исследования, выполненные с применением разработанной авторами системы, могут быть применены не только для уточнения результатов СОУТ, но и при нормировании труда сотрудников [Щеколдин, Богатырева, Илюхина 2018], занятых в опасных и вредных условиях труда, с целью защиты их здоровья и прав в рамках социально-трудовых отношений.

Внедрение усовершенствованной АСМ непроизводственных потерь рабочего времени от заболеваний работников, занятых в опасных и вредных условиях труда, придает всей системе оценки этих условий динамический характер, так необходимый на современном производстве.

## Литература

---

- Виноградова, Максаков, Самохвалов 2019а – Виноградова М.В., Максаков А.А., Самохвалов А.Э. Разработка автоматизированной системы моделирования и контроля непроеизводственных потерь рабочего времени от заболеваний и производственных травм работников, занятых в опасных и вредных условиях труда // Динамика сложных систем. 2019. № 2. С. 5–11.
- Виноградова, Максаков, Самохвалов 2019б – Виноградова М.В., Максаков А.А., Самохвалов А.Э. Учет длительности влияния вредных производственных факторов на здоровье человека в автоматизированной системе моделирования и контроля потерь рабочего времени от заболеваний работников, занятых в опасных и вредных условиях труда // Динамика сложных систем. 2019. № 4. С. 5–11.
- Исмагилова, Франц, Кульмухаметов 2017 – Исмагилова Л.А., Франц М.В., Кульмухаметов М.Б. Моделирование социальной среды предприятия // Вестник ПНИПУ «Социально-экономические науки». 2017. № 2. С. 179–194.
- Кулькова 2015 – Кулькова И.А. Методические подходы к анализу системы нормирования труда в организациях в рыночных условиях // Human Progress. 2015. № 2. С. 24–36.
- Щеколдин, Богатырева, Илюхина 2018 – Щеколдин В.А., Богатырева И.В., Илюхина Л.А. Информационные технологии в нормировании труда: теория и практика использования // Экономика труда. 2018. № 1. С. 87–100.

## References

---

- Vinogradova, M.V., Maksakov, A.A. and Samokhvalov, A.E. (2019), “Development of an automated system for modeling and control of the non-production loss of working time from diseases and industrial injuries of workers employed in hazardous and harmful working conditions”, *Dinamika slozhnykh system*, no. 2, pp. 5–11.
- Vinogradova, M.V., Maksakov, A.A. and Samokhvalov, A.E. (2019), “Recording for the duration of the influence of the harmful production factors on human health in an automated system for modeling and control of loss of working time from diseases of workers employed in hazardous and harmful working conditions”, *Dinamika slozhnykh system*, no. 4, pp. 5–11.
- Ismagilova, L.A., Frants, M.V. and Kulmukhametov, M.B. (2017), “Modeling social environment of an enterprise”, *Bulletin PNRPU, Socio-economic sciences*, no. 2, pp. 179–194.
- Kul'kova, I.A. (2015) “Methodical approaches to the analysis of the labor norms setting in organizations working in the market economy”, *Human Progress*, no. 2, pp. 24–36.
- Schekoldin, V.A., Bogatyreva, I.V. and Ilyukhina, L.A. (2018), “Information technologies in standardization of labor efficiency: theory and practice of application”, *Ekonomika truda*, no. 5, pp. 87–100.

*Информация об авторах*

*Мария В. Виноградова*, кандидат технических наук, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия; 105005, Россия, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5; [vinogradova.m@bmstu.ru](mailto:vinogradova.m@bmstu.ru)

*Алексей А. Максаков*, кандидат технических наук, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия; 105005, Россия, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5; [256m@mail.ru](mailto:256m@mail.ru)

*Алексей Э. Самохвалов*, кандидат экономических наук, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия; 105005, Россия, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5; [samox@bmstu.ru](mailto:samox@bmstu.ru)

*Information about the authors*

*Mariya V. Vinogradova*, Cand. of Sci. (Computer Science), Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia; bld. 5, 2<sup>nd</sup> Bauman Str., Moscow, 105005, Russia; [vinogradova.m@bmstu.ru](mailto:vinogradova.m@bmstu.ru)

*Aleksei A. Maksakov*, Cand. of Sci. (Computer Science), Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia; bld. 5, 2<sup>nd</sup> Bauman Str., Moscow, 105005, Russia; [256m@mail.ru](mailto:256m@mail.ru)

*Aleksei E. Samokhvalov*, Cand. of Sci. (Economics), Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia; bld. 5, 2<sup>nd</sup> Bauman Str., Moscow, 105005, Russia; [samox@bmstu.ru](mailto:samox@bmstu.ru)

## Разработка алгоритма встраивания и извлечения цифровых водяных знаков для видеофайлов AVI-формата

Софья А. Серебрякова

*Московский государственный технический университет  
им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия, sofyaofya98@gmail.com*

Михаил В. Филиппов

*Московский государственный технический университет  
им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия, filippov.mike@mail.ru*

*Аннотация.* На сегодняшний день авторы кинематографических произведений часто сталкиваются с потребностью защиты интеллектуальных прав. Одним из способов решения данной проблемы является использование цифровых водяных знаков (далее ЦВЗ). ЦВЗ – это некоторое шифрованное сообщение, наличие которого позволяет отличить оригинал произведения от его подделки. При этом сам аудио- или видеофайл со встроенным в него сообщением внешне не отличается от файла без ЦВЗ, что является ключевым преимуществом его использования и одновременно затрудняет его незаконное воспроизведение. Совокупность методов незаметного скрывания одних битовых последовательностей в других получила название «цифровая стеганография». Важным преимуществом стеганографии по сравнению с криптографическими методами является сокрытие самого факта встраивания кодового сообщения. Встраивание ЦВЗ методом наименьшего значимого бита (далее НЗБ) позволяет встроить цифровой водяной знак таким образом, что человек не заметит никаких изменений в видеофайле. В данной работе рассмотрены известные методы встраивания ЦВЗ, структура файла AVI-формата. Представлен алгоритм встраивания и извлечения цифровых водяных знаков для видеофайлов AVI-формата, основанный на методе НЗБ с использованием хэш-функции. Алгоритм обеспечивает противодействие распространению контрафактной продукции.

*Ключевые слова:* стеганография, цифровой водяной знак, алгоритм, стегосистема, стегоконтейнер, наименьший значимый бит, хэш-функция

*Для цитирования:* Серебрякова С.А., Филиппов М.В. Разработка алгоритма встраивания и извлечения цифровых водяных знаков для видеофайлов AVI-формата // Вестник РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика». 2021. № 1. С. 20–34. DOI: 10.28995/2686-679X-2021-1-20-34

---

© Серебрякова С.А., Филиппов М.В., 2021

## Development of an algorithm for embedding and extracting digital watermarks for video files of the AVI format

Sofya A. Serebryakova

*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia,  
sofyasofya98@gmail.com*

Mikhail V. Filippov

*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia,  
filippov.mike@mail.ru*

*Abstract.* Nowadays authors of cinematographic works are often faced to protect copyright need. One way to resolve such an issue is to use digital watermarks. Digital watermarks are some kind of encrypted message that allows distinguishing the original work from its forgery. At the same time the audio or video file with a built-in message looks no different from a file without a digital watermark, what is a key advantage of its use and at the same time it makes difficult to playback the file illegally. A set of methods for undetectable hiding some bit sequences in others is called digital steganography. An important advantage of steganography over cryptographic methods is the hiding the fact of embedding a code message. Embedding digital watermarks by using the least significant bit method allows embedding a digital watermark in such a way that a person will not notice any changes in the video file. The article considers the known methods of embedding digital watermarks and the structure of the AVI file format. It presents an algorithm for embedding and extracting digital watermarks for AVI video files based on LSB method with using hash-function. The algorithm provides a counteraction to the spread of counterfeit products.

*Keywords:* steganography, digital watermark, algorithm, stegosystem, stego-container, least significant bit, hash-function

*For citation:* Serebryakova, S.A. and Filippov, M.V. (2021), "Development of an algorithm for embedding and extracting digital watermarks for video files of the AVI format", *RSUH/RGGU Bulletin. "Information Science. Information Security. Mathematics" Series*, no. 1, pp. 20–34, DOI: 10.28995/2686-679X-2021-1-20-34

### *Введение*

Развитие технологий привело к необходимости защиты авторских прав и интеллектуальной собственности, представленной в цифровом виде. Примерами могут являться: фотографии, аудио-

и видеозаписи [Грибунин, Оков, Туринцев 2009]. Именно поэтому разрабатываются различные меры защиты информации. Наука, изучающая способы и методы сокрытия конфиденциальных сведений, называется стеганографией [Конахович, Пузыренко 2006]. Один из способов решения проблемы нарушения авторских прав заключается в использовании цифровых водяных знаков, подтверждающих авторство произведения. Цифровой водяной знак (далее ЦВЗ) – это некоторое шифрованное сообщение, наличие которого позволяет отличить оригинал произведения от его подделки. При этом сам аудио- или видеофайл со встроенным в него сообщением внешне не отличается от файла без ЦВЗ, что является ключевым преимуществом его использования и одновременно затрудняет его незаконное воспроизведение [Серебрякова 2020].

Существуют различные методы встраивания цифровых водяных знаков. Одним из них является метод встраивания информации на уровне коэффициентов. Он осуществляется путем добавления псевдослучайного массива к DC-коэффициентам видео, сжатого по стандарту MPEG [Wu, Wu 1997]. Для внедрения водяного знака осуществляется следующая процедура:

- а) на секретном ключе генерируется массив псевдослучайных целых чисел  $\{-1,1\}$ , имеющий те же размеры, что и I-кадр;
- б) полученный массив модифицируется в соответствии с водяным знаком и умножается на некоторый коэффициент усиления;
- в) значения коэффициентов постоянного тока каждого из I-кадров складываются с соответствующими числами модифицированного массива.

Данный метод содержит существенный недостаток – при его применении достаточно сильно ухудшается качество видео. Чтобы сохранить необходимое качество получаемого в результате видео, коэффициент усиления необходимо брать низким ( $<1$ ) и количество пикселей на один бит ЦВЗ должно быть достаточно большим ( $>>100,000$ ). Это происходит из-за того, что элементы массива ЦВЗ внедряются только в один из 64 коэффициентов дискретного косинусного преобразования (далее ДКП) – коэффициент постоянного тока. А к изменениям в этой области человеческий глаз особенно чувствителен.

Второй рассматриваемый метод – метод встраивания информации на уровне битовой плоскости [Langelaar, Lagendijk, Biemond 1998a, Langelaar, Lagendijk, Biemond 1998b, Langelaar, Lagendijk, Biemond 1998c]. При применении данного метода водяной знак, состоящий из  $l$  битов некоторой последовательности  $b_j$  ( $j = 0,1,2, \dots$ ,

$l - 1$ ), внедряется в поток видеоданных путем замены специально выбранных, подходящих кодовых слов кода переменной длины, заменяя наименее значащий бит их оцифрованного значения на значение  $b_j$ . Для того чтобы убедиться, что внесенные изменения не будут заметны после декодирования и что поток видеоданных не изменил своих размеров, необходимо выбирать только кодовые слова, для которых найдется хотя бы одно другое кодовое слово, удовлетворяющее условиям: одинаковая длина нулевой серии; различия между значениями коэффициентов ДКП равны единице; одинаковая длина кодовых слов. В процессе встраивания водяных знаков задействуются кодовые слова, полученные при межкадровом и внутрикадровом кодировании. Для встраивания ЦВЗ в видео выполняется поиск подходящих кодовых слов. Младший бит таких слов заменяется на бит ЦВЗ. Эта процедура продолжается, пока не будут внедрены все биты водяного знака. Извлечение ЦВЗ реализуется аналогично: сначала ищутся подходящие кодовые слова, из которых берутся младшие биты. Достоинство данного метода заключается в небольшой сложности вычислений. Но есть и существенный недостаток – водяной знак может быть легко удален путем повторного наложения последовательности ЦВЗ.

В данной работе представлен модифицированный алгоритм встраивания и извлечения цифровых водяных знаков, видеофайл формата AVI, основанный на методе НЗБ, в котором для обеспечения необнаружимости скрытой информации выбор байтов встраивания выполняется с использованием хэш-функции. Алгоритм обеспечивает противодействие распространению контрафактной продукции.

### *Структура видеофайлов AVI-формата*

AVI-файл (Audio Video Interleave) – это файл, содержащий видео- и аудиоданные. Файл сохраняется в формате мультимедийного контейнера, который хранит аудио и видео с использованием различных кодеков, например DivX и XviD.

Структура AVI-файла состоит из двух обязательных блоков LIST – это блоки, определяющие формат и данные потока. Также AVI-файлы могут включать индекс-блок – дополнительный блок, который определяет расположение видеоданных в файле. Помимо блоков в рассматриваемых файлах содержится три вида заголовков: основной заголовок файла, заголовки потоков и расширенный заголовок файла.

Рассмотрим подробнее структуру “AVIMAINHEADER”. Она содержит глобальную информацию о всем AVI-файле. Далее представлены названия элементов и их значение [Ns-aviriff-avimainheader 2018]:

- dwMicroSecPerFrame – содержит длительность одного видеокadra в микросекундах;
- dwMaxBytesPerSec – указывает примерную максимальную скорость передачи данных файла;
- dwFlags – содержит перечень свойств видеофайла;
- dwTotalFrames – содержит число видеофреймов;
- dwInitialFrames – указывает смещение аудиоданных по отношению к видео;
- dwStreams – количество потоков в файле;
- dwSuggestedBufferSize – размер буфера, который необходим для хранения блока данных;
- dwWidth – ширина видеопотока;
- dwHeight – высота видеопотока.

На рис. 1 представлен фрагмент структуры AVI-файла, а именно заголовок “AVIMAINHEADER”, полученный с помощью программы “WinHex”.

Структура “BITMAPINFOHEADER” содержит информацию о размерах и цветовом формате аппаратно-независимого растрового формата DIB (Device Independent Bitmap). Рассмотрим названия элементов и их значение [Ns-wingdi-bitmapinfoheader 2018]:

- biSize – размер структуры в байтах;
- biWidth – ширина растрового изображения в пикселях;
- biHeight – высота растрового изображения в пикселях;
- biCompression – тип сжатия растрового изображения;
- biBitCount – элемент, определяющий количество бит на пиксель, а также максимальное количество цветов в изображении в зависимости от заданного значения;
- biSizeImage – размер растрового изображения в байтах;
- biXpelsPerMeter – горизонтальное разрешение в пикселях;
- biYPelsPerMeter – вертикальное разрешение в пикселях;
- biClrUsed – количество цветовых индексов в таблице цветов;
- biClrImportant – количество цветовых индексов, необходимых для отображения растрового изображения.



Offset	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	
00000000	52	49	46	46	74	44	02	00	41	56	49	20	4C	49	53	54	RIFFtD AVI LIST
00000010	C2	22	00	00	68	64	72	6C	61	76	69	68	38	00	00	00	B" hdrlavih8
00000020	40	9C	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	10	01	00	00	@Ъ
00000030	28	00	00	00	00	00	00	00	02	00	00	00	00	00	00	00	(
00000040	B8	02	00	00	1C	02	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	è
00000050	00	00	00	00	00	00	00	00	4C	49	53	54	D8	10	00	00	LISTH
00000060	73	74	72	6C	73	74	72	68	38	00	00	00	76	69	64	73	strlstrh8 vids
00000070	78	76	69	64	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	xvid
00000080	01	00	00	00	19	00	00	00	00	00	00	00	00	28	00	00	(
00000090	35	4C	00	00	10	27	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
000000A0	B8	02	1C	02	73	74	72	66	6C	00	00	00	28	00	00	00	SL '
000000B0	B8	02	00	00	1C	02	00	00	01	00	10	00	58	56	49	44	è strfl (
000000C0	C0	68	22	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	è XVID
000000D0	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	Ah"
000000E0	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
000000F0	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000100	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000110	00	00	00	00	00	00	00	00	4A	55	4E	4B	18	10	00	00	JUNK
00000120	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000130	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000140	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000150	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000160	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000170	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000180	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000190	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
000001A0	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
000001B0	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
000001C0	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
000001D0	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
000001E0	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
000001F0	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000200	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000210	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000220	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000230	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000240	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000250	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000260	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000270	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000280	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	

Рис. 1. Фрагмент окна программы "WinHex".  
Заголовок "AVIMAINHEADER"

На рис. 2 представлен фрагмент структуры заголовка "BIT-MAPINFOHEADER", полученный также с помощью программы "WinHex".

Offset	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	
00000000	52	49	46	46	74	44	02	00	41	56	49	20	4C	49	53	54	RIFFtD AVI LIST
00000010	C2	22	00	00	68	64	72	6C	61	76	69	68	38	00	00	00	B" hdrlavih8
00000020	40	9C	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	10	01	00	00	@#
00000030	28	00	00	00	00	00	00	00	02	00	00	00	00	00	00	00	(
00000040	B8	02	00	00	1C	02	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	è
00000050	00	00	00	00	00	00	00	00	4C	49	53	54	D8	10	00	00	LISTM
00000060	73	74	72	6C	73	74	72	68	38	00	00	00	76	69	64	73	strlstrh8 vids
00000070	78	76	69	64	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	xvid
00000080	01	00	00	00	19	00	00	00	00	00	00	00	28	00	00	00	(
00000090	35	4C	00	00	10	27	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	5L '
000000A0	B8	02	1C	02	73	74	72	66	6C	00	00	00	28	00	00	00	è strfl (
000000B0	B8	02	00	00	1C	02	00	00	01	00	10	00	58	56	49	44	è XVID
000000C0	C0	68	22	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	Ah"
000000D0	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
000000E0	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
000000F0	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000100	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000110	00	00	00	00	00	00	00	00	4A	55	4E	4B	18	10	00	00	JUNK
00000120	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000130	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000140	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000150	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000160	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000170	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000180	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000190	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
000001A0	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
000001B0	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
000001C0	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
000001D0	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
000001E0	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
000001F0	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000200	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000210	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000220	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000230	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000240	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000250	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000260	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000270	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	
00000280	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	

Рис. 2. Фрагмент окна программы “WINHEX”.  
Заголовок “BITMAPINFOHEADER”

*Описание алгоритма встраивания  
и извлечения цифровых водяных знаков  
в видеофайл AVI-формата*

Основная идея алгоритма заключается в использовании метода замены наименее значащего бита с использованием хэш-функции. Суть метода заключается во встраивании цифрового водяного зна-

ка путем изменения последних битов видеофайла, кодирующих цвет на биты скрываемой информации. Данный метод является достаточно распространенным в цифровой стеганографии; как уже было сказано выше, человеку тяжело различать незначительные изменения цвета. Процесс встраивания происходит по принципу изменения НЗБ путем их сдвига в следующей последовательности: 3, 3, 2. Стоит отметить, что последовательность можно выбрать любую, так как от этого не будет зависеть качество видеофайла. Первые три бита встраиваются в R-пиксель (Red), следующие три бита – в G-пиксель (Green), а оставшиеся два бита встраиваются в B-пиксель (Blue). Соответственно при использовании данного метода стоит использовать двоичную систему счисления для осуществления перезаписи наименьшего значимого бита каждого байта в исходном файле.

Для повышения устойчивости к попыткам обнаружения скрытой информации в алгоритме содержится хэш-функция. При встраивании секретной информации хэш-значение принимает переменный размер входных данных и на выходе возвращает фиксированный размер цифровой строки. Хэш-функцию можно представить следующим образом [Manjula, AjitDanti 2015]:

$$m = k \% l, \quad (1)$$

где:  $m$  – позиция НЗБ в пикселе;  
 $k$  – позиция каждого скрытого пикселя;  
 $l$  – количество НЗБ.

Алгоритм встраивания цифровых водяных знаков методом замены наименьшего значащего бита осуществлен в программном комплексе “Visual Studio” на языке программирования C++ с помощью битовых операций. Также для реализации алгоритма была подключена библиотека “FFmpeg”.

Важно обратить внимание на функцию, которая устанавливает кодовую страницу ввода, используемую консолью. В данном алгоритме это функция “SetConsoleCP”. Консоль использует свою кодовую страницу ввода, чтобы преобразовать ввод информации с клавиатуры в соответствующие символьные значения. Для вывода данных в алгоритме использована функция “SetConsoleOutputCP”, которая устанавливает кодовую страницу вывода данных, используемых консолью.

На первом этапе выбираются видеофайл AVI-формата, в который будет встроен ЦВЗ, а также текст, который будет являться самим ЦВЗ. В данной работе цифровым водяным знаком является текст “sofa”. Для того чтобы найти ЦВЗ в кадрах файла, необходим

секретный ключ, с помощью которого можно найти начало и конец текста в строке. Соответственно схему сокрытия информации можно представить как «ключ–текст–ключ».

Встраивание ЦВЗ начинается с функции “hidetext”, в которой с помощью двух циклов программа проходит по высоте и ширине кадра для того, чтобы записать секретный ключ в строку. Осуществляется генерация хэш-значения, определяющего позицию наименьших значимых бит, в которые будет встроена секретная информация. Далее программа выполняет запись цифрового водяного знака, а затем снова запись секретного ключа. Как было сказано выше, встраивание происходит с использованием битовых операций, которые позволяют записать информацию в младшие биты файла. Процесс встраивания информации представлен на рис. 3.

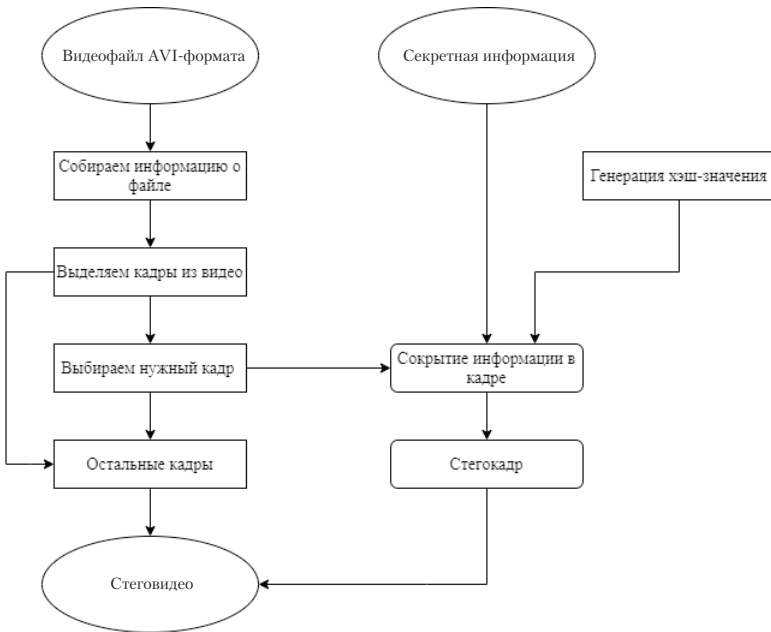


Рис. 3. Встраивание цифрового водяного знака в видеофайл

Также был разработан алгоритм извлечения ЦВЗ, содержащийся в функции “unhidetext”. Сначала программа находит секретный ключ по алгоритму поиска строки в подстроке, а затем считывает

секретный текст, который является ЦВЗ. После считывания ЦВЗ программа снова переходит к секретному ключу. Так, с помощью секретного ключа с обеих сторон текста программа считывает только нужный текст, а не все строки с данными кадра. Декодирование также происходит с помощью битовых операций, расположенных во вложенном цикле, определяющем место скрытого текста. Процесс извлечения информации представлен на рис. 4.

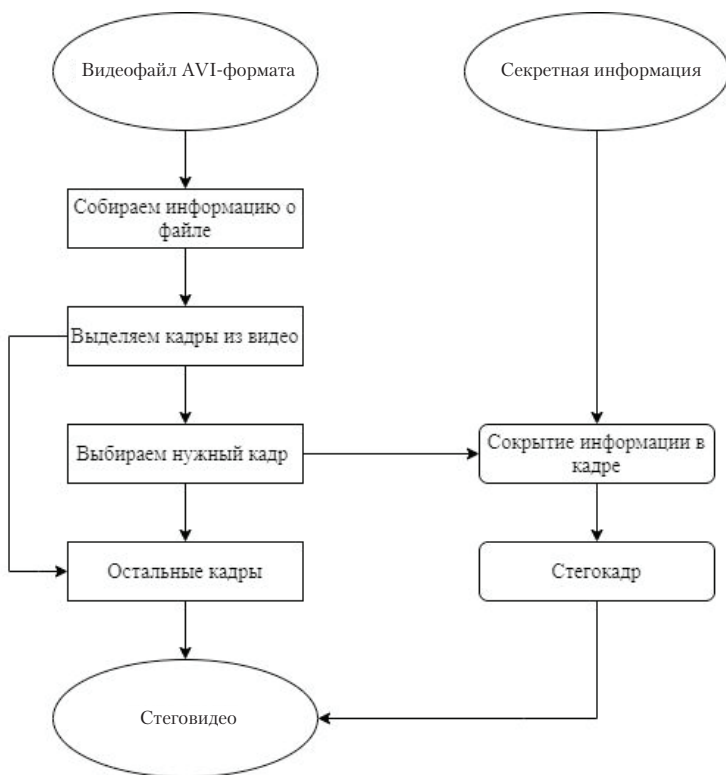


Рис. 4. Извлечение цифрового водяного знака из видеофайла

Для исследования алгоритма был выбран видеофайл AVI-формата длительностью 7 секунд с запечатленным домашним питомцем. После встраивания ЦВЗ был осуществлен визуальный осмотр стегоконтейнера. Искажений в видео- и аудиодорожке не обнаружено. На рис. 5 представлено сравнение исходного (а) и измененного (б) файлов.

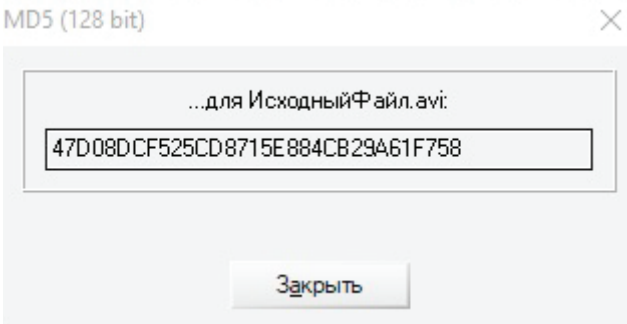


*a*

*b*

*Рис. 5.* Сравнение видеофайлов:  
*a* – исходное видео; *b* – видео со встроенным ЦВЗ

Для определения MD5 хэш-значения [Pierre Richer 2003] была использована программа “WinHex”. С помощью инструмента «Вычислить хэш» были получены значения исходного и измененного файлов. Хэш-значения исходного файла – “47D08DCF525CD8715E884CB29A61F758” (рис. 6), хэш-значения измененного файла – “2B519A6CD301876E2B629C8BDCC7BA88” (рис. 7).



*Рис. 6.* MD5 хэш-значение исходного видеофайла

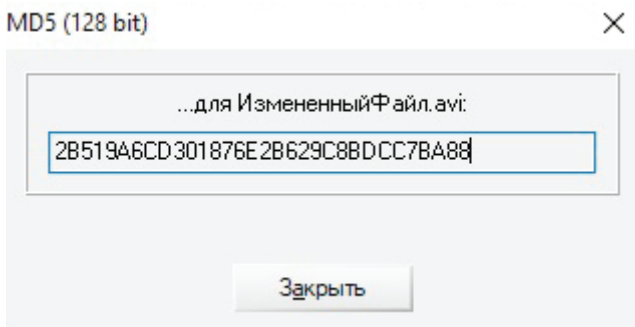


Рис. 7. MD5 хэш-значение видеофайла со встроенным цифровым водяным знаком

С помощью инструмента «Анализ файла» программы “WinHex” никаких данных о внесенных изменениях в файл получить не удалось, так как частотность кодов символов одинаковая.

Стоит отметить, что при конвертации AVI-видеофайла со встроенным ЦВЗ в форматы MOV (a) и MKV (b) визуальных и звуковых искажений не появляется.

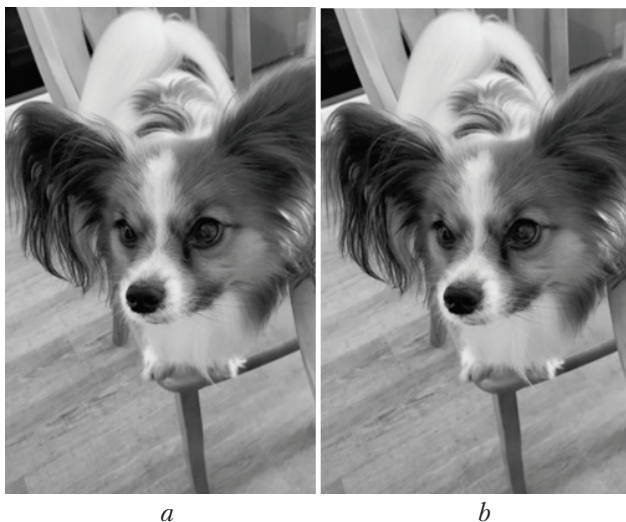


Рис. 8. Конвертированное стеговидео:  
a – видеофайл MOV-формата; b – видеофайл MKV-формата

## Заключение

В статье представлен алгоритм встраивания и извлечения цифрового водяного знака для видеофайлов AVI-формата. При встраивании ЦВЗ в видеофайл происходит незначительное изменение в пикселях, которое невозможно заметить человеческому глазу. Дополнительная защита цифрового водяного знака осуществляется с помощью генерации хэш-значения. Данный алгоритм создан для защиты авторских прав от незаконного использования в сети Интернет.

## Литература

---

- Грибунин, Оков, Туринцев 2009 – *Грибунин В.Г., Оков И.Н., Туринцев И.В.* Цифровая стеганография: Учеб. пособие. М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2009.
- Конахович, Пузыренко 2006 – *Конахович Г.Ф., Пузыренко А.Ю.* Компьютерная стеганография. Теория и практика. М.: МК-Пресс, 2006.
- Серебрякова 2020 – *Серебрякова С.А.* Встраивание цифрового водяного знака в аудиофайлы формата МРЗ для противодействия распространения контрафактной продукции // Политехнический молодежный журнал. 2020. № 5 (46). С. 1–9.
- Langelaar, Lagendijk, Biemond 1997 – *Langelaar G., Lagendijk R., Biemond J.* Real-time Labeling Methods for MPEG Compressed Video // 18<sup>th</sup> Symposium on Information Theory in the Benelux. 1997.
- Langelaar, Lagendijk, Biemond 1998a – *Langelaar G., Lagendijk R., Biemond J.* Real-time Labeling of MPEG-2 Compressed Video // Journal of Visual Communication and Image Representation. 1998. Vol. 9. № 4. P. 256–270.
- Langelaar, Lagendijk, Biemond 1998b – *Langelaar G., Lagendijk R., Biemond J.* Watermark Removal based on Non-linear Filtering // ASCI'98: Proceedings of the Fourth Annual Conference of the Advanced School for Computing and Imaging. Lommel, Belgium. Lommel, 1998.
- Langelaar, Lagendijk, Biemond 1998c – *Langelaar G., Lagendijk R., Biemond J.* Removing Spatial Spread Spectrum Watermarks by Non-linear Filtering [Электронный ресурс] // IX European Signal Processing Conference, 1998. URL: <https://www.eurasip.org/Proceedings/Eusipco/Eusipco1998/sessions/F%20A/FA%20S-2b/2281/ID975.PDF> (дата обращения 10 декабря 2020).
- Manjula, Danti 2015 – *Manjula G.R., Danti A.* A novel hash based least significant bit (2-3-3) image steganography in spatial domain // International Journal of Security, Privacy and Trust Management (IJSPTM). 2015. Vol. 4. Iss. 1. P. 11–20.
- Ns-aviriff-avimainheader 2018 – Ns-aviriff-avimainheader [Электронный ресурс] // Microsoft. URL: <https://docs.microsoft.com/en-us/previous-versions/windows/desktop/api/Aviriff/ns-aviriff-avimainheader> (дата обращения 1 декабря 2020).



- Ns-wingdi-bitmapinfoheader 2018 – Ns-wingdi-bitmapinfoheader [Электронный ресурс] // Microsoft. URL: <https://docs.microsoft.com/en-us/windows/win32/api/wingdi/ns-wingdi-bitmapinfoheader> (дата обращения 1 декабря 2020).
- Richer 2003 – *Richer P.* Steganalysis: Detecting hidden information with computer forensic analysis. Boston, MA: SANS Institute, 2003.
- Wu, Wu 1997 – *Wu T., Wu S.* Selective encryption and watermarking of MPEG video // International Conference on Image Science, System and Technology (CISST '97), Las Vegas, NV, USA, June–July 1997. Las Vegas, NV, 1997. P. 261–270.

## References

---

- Gribunin, V.G., Okov, I.N. and Turintsev, I.V. (2009), *Tsifrovaya steganografiya: Ucheb. posobie* [Digital steganography. A study guide], Solon-press, Moscow, Russia.
- Konakhovich, G.F. and Puzyrenko, A.U. (2006), “Computernaya steganografiya. Teoriya i praktika” [Computer steganography. Theory and practice], МК-press, Kiev, Ukraine.
- Langelaar, G., Lagendijk, R. and Biemond, J. (1998a), “Real-time Labeling of MPEG-2 Compressed Video”, *Journal of Visual Communication and Image Representation*, vol. 9, no. 4, pp. 256–270.
- Langelaar, G., Lagendijk, R. and Biemond, J. (1998b), “Watermark Removal based on Non-linear Filtering”, *ASCI'98: Proceedings of the Fourth Annual Conference of the Advanced School for Computing and Imaging*, Lommel, Belgium.
- Langelaar, G., Lagendijk, R. and Biemond, J. (1998c), “Removing Spatial Spread Spectrum Watermarks by Non-linear Filtering”, *IX European Signal Processing Conference 1998*, [Online], available at: <https://www.eurasip.org/Proceedings/Eusipco/Eusipco1998/sessions/F%20A/FA%20S-2b/2281/ID975.PDF> (Accessed 10 December 2020).
- Manjula, G.R. and Danti, A. (2015), “A novel hash based least significant bit (2-3-3) image steganography in spatial domain”, *International Journal of Security, Privacy and Trust Management (IJSPTM)*, vol. 4, issue 1, pp. 11–20.
- Ns-aviriff-avimainheader (2018), Microsoft [Online], available at: <https://docs.microsoft.com/en-us/previous-versions/windows/desktop/api/Aviriff/ns-aviriff-avimainheader> (Accessed 1 December 2020).
- Ns-wingdi-bitmapinfoheader (2018), Microsoft [Online], available at: <https://docs.microsoft.com/en-us/windows/win32/api/wingdi/ns-wingdi-bitmapinfoheader> (Accessed 1 December 2020).
- Richer, P. (2003), *Steganalysis: Detecting hidden information with computer forensic analysis*, SANS Institute, Boston, MA, USA.
- Serebryakova, S.A. (2020), “Embedding a digital watermark in the MP3 audio files to preclude the spread of counterfeit products”, *Politechnical student journal*, vol. 5 (46), pp. 1–9.
- Wu, T. and Wu, S. (1997), “Selective encryption and watermarking of MPEG video”, *International Conference on Image Science, System and Technology (CISST '97)*, Las Vegas, NV, USA, June–July 1997, Las Vegas, NV, USA, pp. 261–270.

*Информация об авторах*

*Софья А. Серебрякова*, студент, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия; 105005, Россия, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5; sofyasofya98@gmail.com

*Михаил В. Филиппов*, кандидат технических наук, доцент, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия; 105005, Россия, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5; filippov.mike@mail.ru

*Information about the authors*

*Sofya A. Serebryakova*, student, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia; bld. 5, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya Str., Moscow, Russia, 105005; sofyasofya98@gmail.com

*Mikhail V. Filippov*, Cand. of Sci. (Computer Science), associate professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia; bld. 5, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya Str., Moscow, Russia, 105005; filippov.mike@mail.ru

## О формировании пространства для описания тематических документов

Улугбек Ю. Тулиев

*Национальный университет Узбекистана, Ташкент,  
Узбекистан, u.tuliyev@mail.ru*

Мусулмон Я. Лолаев

*Национальный университет Узбекистана, Ташкент,  
Узбекистан, musulmon.lolayev.94@gmail.com*

*Аннотация.* Рассматривается снижение размерности признакового пространства для описания тематических документов. Описание документов представлено в виде таблицы «объект–свойство», для формирования которой разработаны тематические словари объемом не более 100 ключевых слов по каждой предметной области. Корректность формирования словарей доказывается в рамках задачи распознавания образов с непересекающимися классами. В качестве инструмента для исследования используются результаты анализа топологических свойств признакового пространства по значениям мер компактности. Значения мер компактности представляют количественные оценки структуры отношений объектов по каждому классу и выборки в целом. Структура отношений исследуется через разбиение объектов классов на непересекающиеся группы. По бинарному отношению связанности между любыми двумя объектами группы всегда можно построить путь. Выбор пространства для описания документов производится через решение задачи условной оптимизации по методу Лагранжа. Определено условие для формирования упорядоченной последовательности признаков. Использование упорядоченной последовательности рассматривается как способ уменьшения комбинаторной сложности алгоритмов отбора. При удалении малоинформативных признаков из описания документов значение меры компактности выборки достигает своего максимума. Приводятся визуальное представление сложности конфигурации групп и связанность объектов из их состава.

*Ключевые слова:* мешок слов (bag of words), мера компактности классов, математическая лингвистика, тематические словари

*Для цитирования.* Тулиев У.Ю., Лолаев М.Я. О формировании пространства для описания тематических документов // Вестник РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика». 2021. № 1. С. 35–50. DOI: 10.28995/2686-679X-2021-1-35-50

---

© Тулиев У.Ю., Лолаев М.Я., 2021

## On the formation of space for the description of thematic documents

Ulugbek Yu. Tuliev

*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*

*u.tuliyev@mail.ru*

Musulmon Ya. Lolaev

*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*

*musulmon.lolayev.94@gmail.com*

*Annotation.* Reducing the dimension of the feature space for describing thematic documents is considered. Descriptions of documents are presented in the form of an “*object-property*” table, for the formation of which thematic dictionaries were developed with a volume of no more than 100 keywords for each subject area. The correctness of the formation of dictionaries is proved in the framework of the problem of the pattern recognition with disjoint classes. Results of the analysis of the topological properties of the feature space by the values of the compactness measures are used as a research tool. The values of the compactness measures are the quantitative estimation of structures in relations between objects for each class and for the sample as a whole. The structure of relationships is investigated through the division of the class objects into disjoint groups. A path always may be created based on binary relation of connectedness between any two objects of a group. The choice of the space for the description of documents is made by solving the problem of conditional optimization using the Lagrange method. The condition for the formation of an ordered sequence of features is determined. Applying of an ordered sequence is considered as a method to reduce the combinatorial complexity of the selection algorithms. When removing uninformative features from the description of documents, the value of the measure of the compactness of the sample reaches its maximum. A visual representation of the complexity of the configuration of groups and the connectivity of objects from their composition is given.

*Keywords:* bag of words, measure of class compactness, mathematical linguistics, thematic dictionaries

*For citation:* Tuliev, U.Yu. and Lolaev, M.Ya. (2021), “On the formation of space for the description of thematic documents”, *RSUH/RGGU Bulletin. “Informatics. Information security. Mathematics” Series*, no. 1, pp. 35–50, DOI: 10.28995/2686-679X-2021-1-35-50

## Введение

Математическая лингвистика применяется для изучения плохо организованных (структурированных) систем. Сейчас такие системы называют сложными или большими. При анализе сложных систем рассматриваются многообразия структур, которые образуются при описании тематических документов. Одним из направлений анализа такого многообразия является исследование топологических свойств их описания. Количественными оценками топологических свойств могут служить меры компактности объектов классов. В литературных источниках [Загоруйко, Борисова, Дюбанов, Кутненко 2010], [Воронцов 2004] указывалось, что единой меры компактности не существует. Мера компактности, определенная в [Ignatev 2018], служит инструментом для:

- контроля за снижением размерности признакового пространства;
- повышения обобщающей способности алгоритмов распознавания;
- селекции обучающих выборок с коллекциями документов.

Селекция обучающих выборок основывается на удалении шумовых объектов, признаков и минимальном покрытии объектами-эталоном. Целью проведения селекции является минимизация расходов ресурсов для поиска и классификации документов.

С появлением глобальной сети Интернет и упрощением доступа к текстовым документам математическая лингвистика стала одной из предметных областей для использования методов машинного обучения. В настоящее время накоплен огромный объем документов, для которых необходимо использовать формы их описания, пригодные для машинного обучения. Так как содержимое документов слабо структурировано, применяются методы их предварительной обработки. Например, с помощью метода «*мешок слов*» формируют таблицу «объект–свойство», содержащую описание классов документов. Значениями элементов таблицы являются частоты встречаемости ключевых слов в документах. Перечень ключевых слов содержится в тематических словарях.

Проблема регуляризации решения задач обработки тематических документов неоднократно поднималась в научных публикациях [Vorontsov, Potapenko, Plavin 2015], [Sukhareva, Vorontsov 2020], [Veselova, Vorontsov 2021]. Целью регуляризации была разработка эвристических критериев для повышения точности решения. В данном исследовании регуляризацию предлагается проводить через формирование признакового пространства, для оценки качества которого используются меры компактности объектов классов.

Рост размерности признакового пространства при описании документов является причиной возникновения эффекта проклятия размерности, интерпретация которого показана в [Kowsari, Jafari, Heidarysafa, Mendu, Barnes, Brown 2019], [Ferdinand, Kirby, Smith 2019], [Apishev, Koltsov, Koltsova, Nikolenko, Vorontsov 2016]. Отчасти эта проблема решается через гигантские объемы тематических документов, хранящихся в коллекциях (корпусах). Для снижения негативного влияния от проклятия размерности используют методы снижения размерности пространства, которого можно добиться через отбор информативных наборов признаков либо через выбор нового латентного признакового пространства.

Важную роль при классификации документов играет процесс формирования тематических словарей. Объяснение смысла термина «предметно-ориентированный словарь» приводится в [Сидорова, Анохин, Кононенко, Саломатина 2014]. Целью использования словаря является предобработка документов [Батура 2017] через методы  $n$ -грамм и «мешок слов». Как правило, результатом предобработки является табличная форма представления документов на основе метода «мешок слов». Согласно [Abdurakhmonova 2017], в узбекском языке каждая лемма может содержать более 10 лексем. По этой причине не удалось решить проблему леммитизации узбекского языка [Abdurakhmonova 2017], [Abdurakhmonova 2019], [Abdurakhmonova, Tuliyeu 2018].

Предлагается проводить селекцию выборок с описанием текстовых документов с использованием предобработки данных в следующем порядке:

- направленный отбор и удаление шумящих признаков через решение задачи условной оптимизации;
- линейное и нелинейное проецирование описаний объектов в пространство меньшей размерности, чем исходное;
- вычисление оценок структуры отношений объектов по мере компактности классов.

Для проведения части вычислительных экспериментов были использованы функции из библиотеки языка Python [Scikit-learn 2019].

### *Постановка задачи*

Считается, что задано множество объектов  $E_0 = \{S_1, \dots, S_m\}$ , разделенное на  $l$  ( $l \geq 2$ ) непересекающихся подмножеств (классов)

$K_1, \dots, K_l$ ,  $E_0 = \bigcup_{i=1}^l K_i$ . Описание объектов производится с помощью набора из  $n$  количественных признаков  $X(n) = (x_1, \dots, x_n)$ . На множестве описаний объектов  $E_0$  задана метрика  $\rho(x, y)$  и определена мера компактности классов  $\mu(E_0, \rho)$ . Требуется:

- определить набор  $X(h) \subset X(n)$ ,  $d \leq n$  без шумящих признаков;
- реализовать отображение описаний документов из пространства  $R^d$  в пространство размерности  $R^k$ ,  $R^d \rightarrow R^k$ ,  $k < d$ ;
- определить оптимальные размеры пространства  $R^d$  по  $\mu(E_0, \rho)$   
 $d = \arg \max_{t \in \{2, \dots, n\}} \mu(E_0, \rho, R^t)$ .

### *Отбор шумящих признаков и отображение описаний объектов в пространство меньшей размерности*

Снижение размерности признакового пространства проводится с целью решения проблемы размытости отношений между объектами. Оценка размытости основывается на количественных показателях структуры отношений объектов классов. Как правило, при измерении показателей используются меры расстояния между объектами. Большое число признаков, используемых для описания тематических документов, неизбежно приводит к известному явлению проклятия размерности при анализе данных. Негативный эффект этого явления заключается в существенном ограничении возможностей для применения классических методов интеллектуального анализа данных. Использование методов линейного или нелинейного отображения описаний объектов в пространства меньшей размерности также не дает ответы на вопросы:

1. Какая размерность пространства должна быть после отображения?
2. Как измерять качество отображения для принятия решений?
3. По каким свойствам различать описания документов на разных языках?

Отбор шумящих признаков рассматривается как задача условной оптимизации. Отдельной проблемой является выбор ограничений для реализации численных методов решения с учетом наличия классификации тематических документов.

Для вычисления весов признаков и их масштабирования по набору  $X(h) \subset X(n)$ ,  $2 \leq h \leq n$  предлагается функционал [Игнатъев 2001]

$$J(w) = \frac{\sum_{i=1}^h w_i \theta_i}{\sum_{i=1}^h w_i \lambda_i} \rightarrow \min, \quad (1)$$

где  $\theta_i, \gamma_i$  – значения соответственно внутриклассовой близости и межклассового различия по признаку  $x_i \in X(h)$ . Функционал (1) имеет бесконечное множество решений. При ограничении на веса  $\sum_{i=1}^h w_i = 1, w_i > 0$  [Игнатьев 2001] преобразуем (1) к виду

$$F(w, \gamma) = \frac{\sum_{i=1}^h w_i \theta_i}{\sum_{i=1}^h w_i \gamma_i} + \lambda \left( \sum_{i=1}^h w_i - 1 \right). \quad (2)$$

Используя метод неопределенных множителей Лагранжа к (2), получим

$$w_i = \begin{cases} \frac{\gamma_i - \theta_i}{\sum_{\{j|\gamma_j - \theta_j > 0\}} \gamma_j - \theta_j}, \gamma_i - \theta_i > 0, \\ 0, \gamma_i - \theta_i \leq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Множество допустимых значений  $\{w_i\}_{i=1}^h$  по (3) зависит от способов вычисления  $\{\theta_i, \gamma_i\}_{i=1}^h$ .

Метод Лагранжа не гарантирует сходства значений веса  $w_i$  по (3) при использовании разных способов вычисления  $\theta_i, \gamma_i$ . В нашем случае специфика вычислений будет различаться при числе классов не менее двух. При числе классов, равном двум, есть возможность производить предобработку данных, инвариантную к масштабам измерений признаков.

Рассмотрим два способа вычисления значений  $\theta_i, \gamma_i$  на базе критерия (1). Число классов при использовании второго способа равно двум.

*Способ 1*

$$\theta_i = \sum_{l=1}^l \sum_{S_j \in K_l} \frac{|x_{ji} - m_{li}|}{m}, \quad \gamma_i = \sum_{l=1}^l \sum_{S_j \in K_l} \frac{|x_{ji} - m_{li}^*|}{m}, \quad (4)$$



где  $m_{i_i} = \sum_{S_j \in K_t} \frac{x_{ji}}{|K_t|}$ ,  $m_{i_i}^* = \min_{d \in \{1, \dots, l\} \setminus t} |x_{ji} - m_{di}|$ .

*Способ 2.* Преобразуем упорядоченные значения количественного признака  $x_i \in X(n)$  в описании объектов  $E_0$  на две градации номинальной шкалы измерений. Выбор градаций производится по двум интервалам  $[c_1, c_2]$  и  $[c_2, c_3]$ , границы которых определены по критерию [Игнатьев 2014]

$$\left( \frac{\sum_{p=1}^2 \sum_{i=1}^2 u_i^p \left( m - |K_i| - \sum_{j=1}^2 u_j^p + u_i^p \right)}{2|K_1||K_2|} \right) \left( \frac{\sum_{p=1}^2 \sum_{i=1}^2 u_i^p (u_i^p - 1)}{|K_1|(|K_1| - 1) + |K_2|(|K_2| - 1)} \right) \rightarrow \max_{c_1 < c_2 < c_3}, \quad (5)$$

где  $u_i^p$  – число объектов класса  $K_i$  в  $p$ -ом интервале.

Обозначим через  $g_{1i}^t$ ,  $g_{2i}^t$  частоты встречаемости значений градации  $t$  ( $t = 1, 2$ ) в описании объектов в  $K_1$  и  $K_2$ . Тогда

$$\gamma_i = 1 - \frac{\sum_{t=1}^2 g_{1i}^t g_{2i}^t}{|K_1||K_2|}, \quad \theta_i = 1 - \frac{\sum_{t=1}^2 g_{1i}^t (g_{1i}^t - 1) + g_{2i}^t (g_{2i}^t - 1)}{|K_1|(|K_1| - 1) + |K_2|(|K_2| - 1)}. \quad (6)$$

Множество значений  $\{\theta_i, \gamma_i\}_{i=1}^h$  можно использовать при формировании набора признаков  $X(h) \subset X(n)$ ,  $2 \leq h < n$ . Согласно выводам теоремы из [Игнатьев 2001], признак  $x_j$  является кандидатом на удаление из  $X(h+1)$ , если

$$\frac{\theta_j}{\gamma_j} = \max_{x_i \in X(h+1)} \frac{\theta_i}{\gamma_i}. \quad (7)$$

Выбор способа (4) или (6) может зависеть от числа классов документов и результатов применения метода главных компонент PCA или T-SNE [Scikit-learn, 2019] для отображения описаний объектов из  $R^h$  в  $R^k$ ,  $k < h$ . В силу условия  $\sum_{i=1}^h w_i = 1$  значения весов признаков на каждом наборе  $X(h) \subset X(n)$  будут разные.

При наличии классификации документов можно сделать процесс уменьшения размерности пространства управляемым. В качестве критерия для управления предлагается использовать значения

меры компактности [Ignatev 2018], определяемые по структуре отношений объектов классов. Значения меры компактности класса  $K_p$ ,  $t = 1, \dots, l$  вычисляются через разбиение объектов на непересекающиеся группы  $G_{t1}, \dots, G_{t\beta(t)}$ ,  $\beta(t) \geq 1$  по

$$\Theta_t = \frac{\sum_{i=1}^{\beta(t)} |G_{ti}|^2}{|K_t|^2} \quad (8)$$

и выборки в целом по

$$\Theta = \frac{\sum_{i=1}^l |K_i| \Theta_i}{m}. \quad (9)$$

Удаление части «сырых» признаков по (7) рассматривается как регуляризация процесса распознавания тематических документов с целью повышения его точности.

### *Анализ кластерной структуры документов*

Рассматривается кластерный анализ данных, источником которых является множество текстовых документов. Описание документов и выбор методов для их анализа связаны с проблемами BigData. Есть большая потребность в разработке технических, научных, методических средств и подходов с целью извлечения полезной для пользователей информации из документов.

Компьютеры могут быть использованы в качестве технического средства, которое востребовано для реализации процесса извлечения новых знаний по описанию содержимого документов. Научную и методическую часть процесса представляют методы и алгоритмы машинного обучения.

Пространство для кластерного анализа описаний текстовых документов (объектов) имеет большую размерность. Проблемы, связанные с формированием признакового пространства для описания текстовых документов, приведены в [Ian, Yoshua, Aaron 2017]. Не существует апробированных стандартов для описания структуры отношений между содержимым документов. Известные методы анализа кластерной структуры не являются устойчивыми. Как правило, форма кластеров сводится к гипершару или гиперкубу.

Предлагается результаты кластерного анализа [Тулиев 2019] оценивать через меру компактности с множеством допустимых значений в  $(0;1)$ .

При поиске закономерностей по множеству документов (объектов) считается, что описания близких по содержанию (смыслу) документов образуют устойчивые кластеры в признаковом пространстве. Большинство известных методов кластерного анализа не гарантируют обнаружение устойчивых регулярностей в данных.

### *Вычислительный эксперимент*

В качестве материала для исследований использовались авторефераты диссертаций из архива Высшей аттестационной комиссии Республики Узбекистан [Ziyonet, 2006] за период с 2016 по 2019 гг. Общеизвестных словарей, содержащих термины для научных публикаций на узбекском языке, не существует. Для обозначения одинаковых по смыслу понятий в публикациях часто используются разные термины. Терминологические словари по 12 предметам (научным дисциплинам) были составлены авторами статьи. Решение о включении термина в словарь по научной дисциплине принималось исходя из частоты встречаемости его в документах. Всего в словари было включено 487 слов, которые использовались для формирования исходного признакового пространства.

В эксперименте при вычислении меры компактности рассматривалось разбиение 1634 документов на классы по двум вариантам:

- каждый класс содержит документы из одной предметной области;
- документы по одному предмету представляют первый класс, остальные 11 предметов – второй класс.

Результаты вычислений мер компактности по (8) и (9) для первого варианта представлены в табл. 1.

Таблица 1

Значения мер компактности  
при классификации документов  
по предметным областям

Предметная область	Количество документов	Мера компактности по	
		предметной области	выборке
Биология	109	0,4370	0,5686
Физика	162	0,0515	
География	28	0,2976	
Геология	44	0,5103	
Юриспруденция	83	0,9294	
Экономика	189	0,7829	
Химия	120	0,3655	
Культура	11	0,6859	
Математика	95	0,0145	
Педагогика	137	0,9426	
Техника	380	0,5138	
Медицина	277	0,8678	

Как видно из табл. 1, наибольшей обособленностью (связанностью) характеризуются документы по педагогике. Самые низкие показатели компактности получены по математике и физике. При объединении документов по этим предметам в один класс было получено значение меры компактности, равное 0,3296. Данный результат показывает наличие родственных терминов по этим предметам, которые нашли отражение при выборе научной классификации для присуждения ученых степеней по физико-математическим наукам.

Влияние снижения размерности пространства на компактность описаний документов через удаление шумовых признаков по (6) и (7) при классификации по второму варианту показано в табл. 2.

Таблица 2

Значения мер компактности  
при разделении документов на два класса  
в исходном пространстве и с учетом снижения  
размерности пространства

Предметная область	Количество признаков	Мера компактности по		
		предметной области	дополнению к предметной области	выборке
Биология	487	0,1999	0,9753	0,9236
	439	0,2174	0,9778	0,9271
Физика	487	0,0441	0,8663	0,7848
	94	0,0214	0,8714	0,7870
География	487	0,6837	0,9963	0,9909
	446	0,6837	0,9963	0,9909
Геология	487	0,5754	0,9962	0,9849
	8	0,7179	0,9949	0,9875
Юриспруденция	487	0,8615	0,9987	0,9917
	37	0,9762	1,0	0,9988
Экономика	487	0,8392	0,9739	0,9583
	35	0,9073	0,9739	0,9662
Химия	487	0,365	0,9338	0,8920
	106	0,2396	0,9492	0,8971
Культура	487	0,4380	1,0	0,9962
	22	0,8347	1,0	0,9989
Математика	487	0,0127	0,8878	0,8369
	78	0,0149	0,8951	0,8440
Педагогика	487	0,7810	0,9854	0,9682
	22	0,8871	0,9800	0,9723
Техника	487	0,5753	0,8588	0,7929
	484	0,5753	0,8588	0,7929
Медицина	487	0,7301	0,9577	0,9191
	291	0,8478	0,9678	0,9475

Наиболее сильный эффект от снижения размерности (см. табл. 2) получен по медицине. Нет изменения значений компактности при снижении размерности с 487 до 446 признаков по географии.

Для визуализации результатов анализа использовались алгоритмы PCA и T-SNE из библиотеки языка Python [Scikit-learn 2019]. В качестве примера рассматривалось разбиение на группы по отношению связанности объектов при включении в первый класс документов из геологии и всех остальных – во второй класс. На рис. 1 показаны конфигурации двух групп с максимальным числом документов из каждого класса.

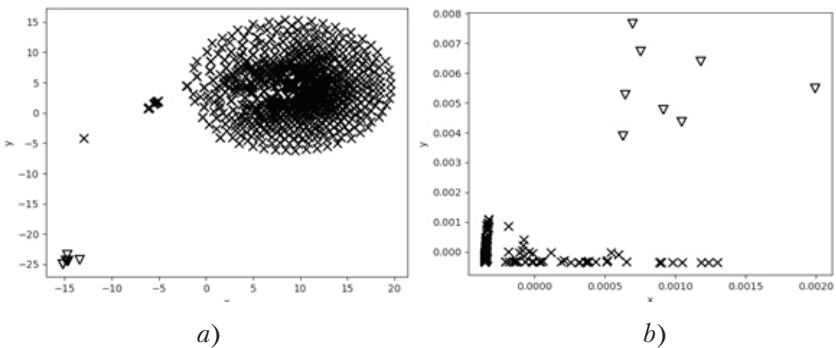


Рис. 1. Конфигурация двух групп с максимальным числом документов из каждого класса: а) по методу T-SNE; б) по методу PCA

Поскольку метод T-SNE является стохастическим, на рис. 1 представлен один из возможных вариантов его использования.

### Заключение

Данное исследование демонстрирует возможности по применению методов интеллектуального анализа данных для извлечения знаний из коллекций тематических документов. Предложенная технология может быть использована для формирования описаний документов через обоснование включения терминов в предметно-ориентированные словари и отбор информативных признаков.

## Литература

---

- Батура 2017 – *Батура Т.В.* Методы автоматической классификации текстов // Программные продукты и системы. 2017. Т. 30. № 1. С. 85–99.
- Воронцов 2004 – *Воронцов К.В.* Комбинаторный подход к оценке качества обучаемых алгоритмов // Математические вопросы кибернетики. 2004. Т. 13. С. 5–36.
- Загоруйко, Борисова, Дюбанов, Кутненко 2010 – *Загоруйко Н.Г., Борисова И.А., Дюбанов В.В., Кутненко О.А.* Количественная мера компактности и сходства в конкурентном пространстве // Сибирский журнал индустриальной математики. 2010. Т. 13. № 1 (41). С. 59–71.
- Игнатьев 2001 – *Игнатьев Н.А.* Выбор минимальной конфигурации нейронных сетей // Вычислительные технологии. 2001. Т. 6. № 1. С. 23–28.
- Игнатьев 2014 – *Игнатьев Н.А.* Обобщенные оценки и локальные метрики объектов в интеллектуальном анализе данных. Ташкент: Университет, 2014.
- Сидорова, Анохин, Кононенко, Саломатина 2014 – *Сидорова Е.А., Анохин С.В., Кононенко И.С., Саломатина Н.В.* Тематический анализ запросов пользователей на основе предметно-ориентированного словаря // Вестник Новосибирского гос. ун-та. Серия: Информационные технологии. 2014. Т. 12. № 4. С. 83–95.
- Тулиев 2019 – *Тулиев У.Ю.* Кластерный анализ текстовых документов по отношению их связности // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2019. № 6 (24). С. 102–109.
- Abdurakhmonova 2017 – *Abdurakhmonova N.A.* Modeling analytic forms of verb in Uzbek as stage of morphological analysis in machine translation // Iranian Journal of Social Sciences and Humanities Research. 2017. Vol. 5, issue 3. P. 97–107.
- Abdurakhmonova, Tuliyeu 2018 – *Abdurakhmonova N.A., Tuliyeu U.Y.* Morphological analysis by finite state transducer for Uzbek-English machine translation // International Journal of Comparative Literature and Translation Studies. 2018. Vol. 3. P. 59–66.
- Abdurakhmonova 2019 – *Abdurakhmonova N.A.* Two-level morphological analysis of the uzbek corpus // Материалы IV Международного научного конгресса. Иностранная филология. Социальная и национальная вариативность языка и литературы. Севастополь, 2019. С. 425–431.
- Apishev, Koltsov, Koltsova, Nikolenko, Vorontsov 2016 – *Apishev M., Koltsov S., Koltsova O., Nikolenko S., Vorontsov K.* Mining ethnic content online with additively regularized topic models // Computación y Sistemas. 2016. Vol. 20, issue 3. P. 387–403.
- Ferdinand, Kirby, Smith 2019 – *Ferdinand V., Kirby S., Smith K.* The cognitive roots of regularization in language // Cognition. 2019. № 184. P. 53–68.
- Ian, Yoshua, Aaron 2017 – *Ian G., Yoshua B., Aaron C.* Deep learning. Cambridge, MA; London: The MIT Press, 2017.
- Ignatev 2018 – *Ignatev N.A.* Structure Choice for Relations between Objects in Metric Classification Algorithms // Pattern Recognition and Image Analysis. 2018. Vol. 28. № 4. P. 695–702.

- Kowsari, Jafari, Heidarysafa, Mendu, Barnes, Brown 2019 – *Kowsari K., Jafari M.K., Heidarysafa M., Mendu S., Barnes L., Brown D.* Text Classification Algorithms: A Survey // Information. 2019. Vol. 10 (4). P. 150.
- Scikit-learn 2019 – User guide released 0.21.3, 2019 [Электронный ресурс] // Scikit-learn. URL: <https://scikit-learn.org/> (дата обращения 10 декабря 2020).
- Sukhareva, Vorontsov 2020 – *Sukhareva A.V., Vorontsov K.V.* Building a complete set of topics of probabilistic topic models // Intelligent systems. Theory and applications. 2020. Vol. 23. Issue 4. P. 7–23.
- Veselova, Vorontsov 2021 – *Veselova E., Vorontsov K.* Topic Balancing with Additive Regularization of Topic Models // Proceedings of the 58<sup>th</sup> Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics: Student Research Workshop. Seattle, Washington. Red Hook, NY: Curran Associates, 2021. P. 59–65.
- Vorontsov, Potapenko, Plavin 2015 – *Vorontsov K., Potapenko A., Plavin A.* Additive regularization of topic models for topic selection and sparse factorization // International Symposium on Statistical Learning and Data Sciences. Egham, UK, 2015. P. 193–202.
- Ziyonet 2006 – Образовательный портал Ziyonet [Электронный ресурс]. URL: <http://library.ziyonet.uz/uz> (дата обращения 10 декабря 2020).

## References

---

- Abdurakmonova, N.A. (2017), “Modeling analytic forms of verb in Uzbek as stage of morphological analysis in machine translation”, *Iranian Journal of Social Sciences and Humanities Research*, vol. 5, issue 3, pp. 97–107.
- Abdurakhmonova, N.A. and Tuliyeu U.Y. (2018), “Morphological analysis by finite state transducer for Uzbek-English machine translation”, *International Journal of Comparative Literature and Translation Studies*, vol. 3, pp. 59–66.
- Abdurakhmonova, N.A. (2019), “Two-level morphological analysis of the Uzbek corpus”, *Proc. IV Int. Sci. Congress. “International Philology. Social and National variability of language and literature”*, Sevastopol', Russia, pp. 425–431.
- Apishev, M., Koltsov, S., Koltsova, O., Nikolenko, S. and Vorontsov, K. (2016), “Mining ethnic content online with additively regularized topic models”, *Computacion y Sistemas*, vol. 20, no. 3, pp. 387–403.
- Batura, T.V. (2017), “Methods of the automatic texts classification”, *Programmye produkty i sistemy*, vol. 30, no. 1, pp. 85–99.
- Ferdinand, V., Kirby, S. and Smith, K. (2019), “The cognitive roots of regularization in language”, *Cognition*, no. 184, pp. 53–68.
- Ian, G., Yoshua, B. and Aaron, C. (2017), *Deep learning*, The MIT Press, Cambridge, MA, USA; London, UK.
- Ignat'ev, N.A. (2018), “Structure choice for relations between objects in metric classification algorithms”, *Pattern Recognition and Image Analysis*, vol. 28, no. 4, pp. 695–702.



- Ignat'ev, N.A. (2001), "Choosing the minimal configuration of neural networks", *Vychislitelnyye tekhnologii*, vol. 6, no. 1, pp. 23–28.
- Ignat'ev, N.A. (2014), *Obobshchennyye otsenki i lokal'nyye metriki ob'ektov v intellektual'nom analize dannykh* [Generalized estimates and local metrics of objects in the data mining], Universitet, Tashkent, Uzbekistan.
- Kowsari, K., Jafari, M.K., Heidarysafa, M., Mendu, S., Barnes, L. and Brown, D. (2019), "Text classification algorithms: a survey", *Information*, vol. 10 (4), p. 150.
- Scikit-learn (2019), User guide released 0.21.3 (2019), *Scikit-learn* [online], available at: <https://scikit-learn.org/> (Accessed 20 December 2020).
- Sidorova, Ye.A., Anokhin, S.V., Kononenko, I.S. and Salomatina, N.V. (2014), "Tematicheskii analiz zaprosov pol'zovateley na osnove predmetno-oriyentirovannogo slovarya", *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Informatsionnyye tekhnologii*, vol. 12, no. 4, pp. 83–95.
- Sukhareva, A.V. and Vorontsov, K.V. (2020), "Building a complete set of topics of probabilistic topic models", *Intelligent systems. Theory and applications*, vol. 23, issue 4, pp. 7–23.
- Tuliyev, U.Yu. (2019), "Cluster analysis of the text documents in relation to their connectivity", *Problemy vychislitelnoi i prikladnoi matematiki*, no. (24), pp. 102–109.
- Veselova, E. and Vorontsov, K. (2021), "Topic balancing with additive regularization of topic models", *Proceedings of the 58th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics: Student Research Workshop, Seattle, Washington*, Curran Associates, Red Hook, NY, pp. 59–65.
- Vorontsov, K.V. (2004), "Combinatorial approach to assessing the quality of learned algorithms", *Matematicheskie voprosy kibernetiki*, vol. 13, pp. 5–36.
- Vorontsov, K., Potapenko, A. and Plavin, A. (2015), "Additive regularization of topic models for topic selection and sparse factorization", *International Symposium on Statistical Learning and Data Sciences*, Egham, UK, pp. 193–202.
- Zagoruiko, N.G., Borisova, I.A., Dyubanov, V.V. and Kutnenko, O.A. (2010), "Quantitative measure of compactness and similarity in competitive space", *Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki*, vol. 13, no. 1 (41), pp. 59–71.
- Ziyonet (2006), *Educational portal Ziyonet* [Online], available at: <http://library.ziyonet.uz/> (Accessed 20 December 2020).

### *Информация об авторах*

*Улугбек Ю. Тулиев*, докторант, Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан; 100174, Узбекистан, Ташкент, Университетская ул., д. 4; [u.tuliyev@mail.ru](mailto:u.tuliyev@mail.ru)

*Мусулмон Я. Лолаев*, преподаватель, Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан; 100174, Узбекистан, Ташкент, Университетская ул., д. 4; [musulmon.lolayev.94@gmail.com](mailto:musulmon.lolayev.94@gmail.com)

*Information about the authors*

*Ulugbek Yu. Tuliiev*, doctoral student, National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan; bld. 4, University Str., Tashkent, Uzbekistan, 100174; u.tuliyev@mail.ru

*Musulmon Ya. Lolaev*, lecturer, National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan; bld. 4, University Str., Tashkent, Uzbekistan, 100174; musulmon.lolayev.94@gmail.com

# Информационная безопасность

---

УДК 004.056

DOI: 10.28995/2686-679X-2021-1-51-65

## Дистанционное обучение и информационная безопасность

Андрей В. Гавриленко

*Московский экономический институт, Москва, Россия,  
agavr-51@yandex.ru*

*Аннотация.* В настоящей работе рассматривается проблема информационной безопасности систем дистанционного образования. Анализируются функции и архитектура типовой системы дистанционного обучения. Рассматривается информационная система вуза для решения задач дистанционного обучения с учетом требований обеспечения информационной безопасности. Определены ценные активы и информационные ресурсы, описаны существующие угрозы безопасности. Представлены субъекты взаимодействия при дистанционном режиме обучения. Рассмотрены основные направления деятельности вуза в системе дистанционного обучения, требующие постоянного контроля информационной безопасности. Составлена модель угроз и выделены основные уязвимости безопасности. Проведен анализ причин и последствий нарушения информационной безопасности системы дистанционного обучения. Выявлены наиболее уязвимые и критичные места. Рассмотрены требования к оборудованию и программному обеспечению, реализующим работу в дистанционном режиме. Представлен рекомендуемый перечень технических и программных средств, обеспечивающих выполнение требований по безопасности. Выделены основные направления защиты для систем дистанционного обучения. Показана необходимость проведения регулярной оценки защищенности как средства контроля эффективности системы защиты.

*Ключевые слова:* образовательное учреждение, дистанционное обучение, информационная система, информационная безопасность, администрирование безопасности, персональные данные, модель угроз, риски, атаки, системы защиты.

*Для цитирования:* Гавриленко А.В. Дистанционное обучение и информационная безопасность // Вестник РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика». 2021. № 1. С. 51–65. DOI: 10.28995/2686-679X-2021-1-51-65

---

© Гавриленко А.В., 2021

## Distance learning and information security

Andrei V. Gavrilenko

*Moscow Economical Institute, Moscow, Russia,  
agavr-51@yandex.ru*

*Abstract.* The article considers an issue of information security of the distance education systems. It analyzes the functions and architecture of the typical distance education system. With considering the requirements of information security it also discusses the university information system for solving the distance learning problems. The author defines valuable assets and information resources and describes the existing security threats. The subjects of interaction in the distance learning mode are presented. There is a consideration of the principal directions of the university's activity in the distance learning system, requiring constant monitoring of information security. A threat model is worked out and the main security vulnerabilities are highlighted. The analysis of the causes and consequences of information security violation in the distance learning system is carried out and most vulnerable and critical nodes were identified. The hardware and software requirements for the remote mode work are regarded. A recommended list of hardware and software tools that ensure compliance with safety requirements is presented. The major lines of protection for distance learning systems are highlighted. The article proves the necessity of conducting a regular security assessment as a means for monitoring an effectiveness of the protection system.

*Keywords:* educational institution, distance learning, information system, information security, administration of security, personal data, threat model, threats, attacks, protection system

*For citation:* Gavrilenko, A.V. (2021), "Distance learning and information security", *RSUH/RGGU Bulletin. "Information Science. Information Security. Mathematics" Series*, no. 1, pp. 51–65, DOI: 10.28995/2686-679X-2021-1-51-65

### *Введение*

Современный этап развития образования, в том числе в условиях пандемии, характеризуется необходимостью обеспечения интерактивного взаимодействия субъектов обучения в диалоговом дистанционном режиме. Дистанционное образование является в настоящее время основой успешной деятельности любого вуза. Системы дистанционного образования базируются на информационной системе (ИС) вуза и используют web-ресурсы для организации взаимодействия обучающихся и преподавателей.

При дистанционном взаимодействии участников образовательного процесса основными информационными ресурсами являются:

- сайт (портал) образовательного учреждения;
- базы данных вуза, включающие материалы учебных курсов, электронные учебники, оценочные материалы, разнообразные методические и административные материалы, информацию для студентов и данные об успеваемости;
- веб-приложение LMS (Learning Management System) – внешний интерфейс, предназначенный для реализации интерактивного удаленного доступа. Контент загружается на сервер LMS-платформы, пользователи получают к ней доступ через Интернет. Это самый распространенный вид платформ для дистанционного обучения.

В данной работе рассматривается ИС вуза для решения вышеперечисленных задач с учетом требований обеспечения информационной безопасности. Рассматривается примерный сценарий существующих угроз безопасности при дистанционном обучении.

Субъектами взаимодействия при дистанционном режиме обучения являются:

- преподаватели – разрабатывают учебные курсы, контролируют учебный процесс;
- методисты вуза – управляют организацией учебного процесса, осуществляют взаимодействие со студентами и преподавателями;
- IT-специалисты и администраторы – обеспечивают управление ИС, в том числе контролируют вопросы информационной безопасности;
- студенты – осваивают учебные программы, проходят тестирование и другие контрольные мероприятия.

Наряду с традиционными мотивами дистанционного обучения (развитие личностно-ориентированного обучения, дополнительного и опережающего образования, создание единой информационно-образовательной среды) также обеспечивается независимость образовательного процесса от места и времени обучения, что особенно важно, учитывая нынешнее положение дел в стране. В соответствии с приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 14.03.2020 № 397 вузы перешли на дистанционное обучение студентов.

Организация удаленного режима обучения предполагает использование одной из современных платформ управления виртуальной учебной средой. Вопрос выбора платформы зависит от конкретных условий и технических возможностей вуза.

Соответственно структуры систем электронного обучения в настоящее время весьма разнообразны. Перечень образовательных платформ, рекомендованных Министерством просвещения Российской Федерации, представлен в документе [Готская, Жучков, Кораблев 2020].

### *Структура системы*

В рассматриваемой в работе вузовской структуре (университет «Синергия» – далее Университет) используется система дистанционного обучения MegaCampus – электронная сеть российских университетов. Основу информационного обеспечения составляют официальный сайт Университета, комплексы 1С, Directum (межкорпоративный документооборот), Tandem (языковое приложении), Консультант плюс.

Система реализует следующие функции:

- создание и загрузку учебных и вспомогательных материалов, в том числе онлайн-тестов, системы выдачи и проверки заданий;
- оперативный контроль успеваемости, менеджмент качества учебного процесса;
- хранение и обработку информации о студенческом и кадровом составе вуза, научно-методической деятельности сотрудников;
- расчет часов и распределение учебной нагрузки, оптимизацию штатного состава;
- автоматизацию делопроизводства, хранение, анализ планов, графиков, расписаний учебных занятий и экзаменов;
- форумы, чаты, видеоконференции и другие виды сетевой коллективной интерактивности.

Программная архитектура ИС Университета представлена на рис. 1.

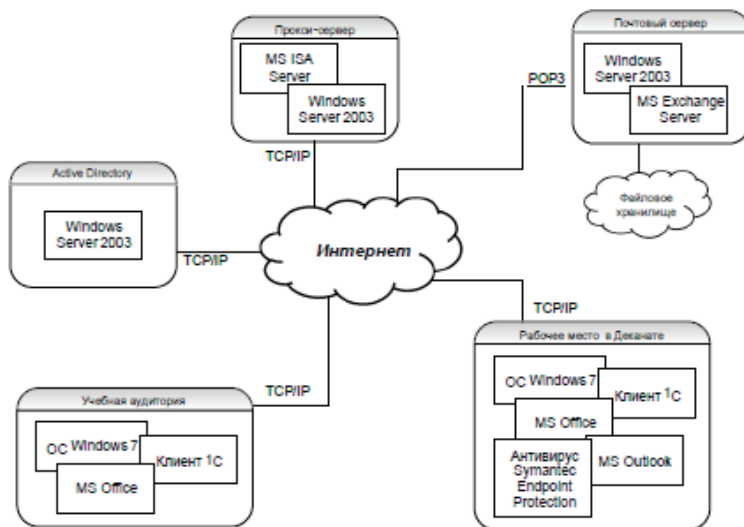


Рис. 1. Программная архитектура ИС Университета

Некоторые параметры ИС представлены в табл. 1.

Таблица 1

Некоторые параметры ИС Университета

Параметр	Показатель
Наличие в образовательном учреждении подключения к сети Internet	Да
Скорость подключения	Выше 2 Мбит/с
Количество Intranet-серверов	Более 50
Количество локальных сетей в образовательном учреждении	4
Количество терминалов, с которых имеется доступ к сети Internet	Более 1500
Количество единиц вычислительной техники (компьютеров)	Более 1500
Количество компьютерных классов	23
Количество компьютеров, с которых имеется доступ к электронным библиотечным системам	Более 1500

## *Угрозы и риски*

Характерной особенностью дистанционного режима является то, что значительное количество студентов, проходящих обучение, работают с системой одновременно. В процессе своего функционирования система подвергается множеству негативных воздействий, которые могут привести к нарушению информационной безопасности образовательного процесса. Согласно данным компании “Positive Technologies”, для ИС образовательных организаций при дистанционном режиме работы чаще всего реализуются следующие виды угроз [Оладько, Бабенко, Алексина 2017]:

- утечка информации;
- SQL-инъекции (внедрение в запрос SQL-кода с целью взлома сайтов и баз данных);
- вредоносное программное обеспечение (несанкционированный доступ к информации);
- ошибки операторов;
- атаки типа «отказ в обслуживании» (DoS-атаки).

При этом злоумышленники преследуют следующие цели:

- получение несанкционированного доступа к ИС Университета;
- нарушение целостности и/или уничтожение учебных и оценочных материалов, а также данных об учебном процессе;
- получение доступа к персональным данным студентов, преподавателей и сотрудников;
- внесение несанкционированных изменений в базы данных учебных ведомостей;
- получение несанкционированного доступа к материалам научно-исследовательской и инновационной деятельности;
- нарушение доступности информации и материалов учебных курсов для пользователей.

Составим таблицу для оценки рисков на примере трех информационных активов вуза, а именно:

- 1) база данных студентов с персональными данными. Ценность актива средняя;
- 2) учебные материалы и отчетные документы. Ценность актива средняя;
- 3) договоры со студентами и преподавателями. Ценность актива высокая.

Определим угрозы и их уровень.



Угрозы:

- 1) ошибки оператора – уровень угрозы низкий;
- 2) угроза хищения данных – уровень угрозы средний;
- 3) угроза сбоев в функционировании услуг интернет-провайдеров – уровень угрозы высокий.

Для того чтобы произвести количественную оценку рисков, используем известную формулу:

$$R = P(v) * S,$$

где: R – значение риска;  
P(v) – вероятность реализации угрозы;  
S – ценность актива (степень тяжести последствий).

Для информационных активов Университета определим ценность и поставим оценку в интервале от 0 до 4.

1. База данных студентов с персональными данными.  
Возможный ущерб: нарушение законов и/или подзаконных актов; необеспеченность личной безопасности. Оценка этого актива: 3.
2. Учебные материалы и отчетные документы.  
Возможный ущерб: снижение эффективности системы; негативный эффект с точки зрения обеспечения правопорядка. Оценка этого актива: 1.
3. Договоры со студентами и преподавателями.  
Возможный ущерб: финансовые потери; нарушение деловых операций.  
Оценка этого актива: 4.

Для того чтобы произвести оценку рисков и узнать вероятность возникновения угрозы, используем таблицы 2–4.

В таблицах отмечены значения вероятностей возникновения угроз (влияния на информационную безопасность, связанную со сценарием инцидента) для определенных активов, где синим цветом отмечена угроза ошибки оператора, зеленым – угроза хищения данных, а красным – угроза сбоев в функционировании интернет-провайдера.

Получаемый в результате риск измеряется по шкале от 0 до 8 (низкий риск 0–2, средний риск 3–5, высокий риск 6–8).

1. База данных студентов с персональными данными.

Таблица 2

Определение вероятности возникновения угроз

Ценность актива	Уровень угрозы								
	низкий		средний					высокий	
	Н	С	В	Н	С	В	Н	С	В
0	0	1	2	1	2	3	2	3	4
1	1	2	3	2	3	4	3	4	5
2	2	3	4	3	4	5	4	5	6
3	3	4	5	4	5	6	5	6	7
4	4	5	6	5	6	7	6	7	8

Обозначения: Н – низкий; С – средний; В – высокий

При ошибке оператора  $R = 3 * 3 = 9$ .

При хищении данных  $R = 4 * 3 = 12$ .

При сбоях в функционировании услуг интернет-провайдера  $R = 6 * 3 = 18$ .

2. Учебные материалы и отчетные документы.

Таблица 3

Определение вероятности возникновения угроз

Ценность актива	Уровень угрозы								
	низкий		средний					высокий	
	Н	С	В	Н	С	В	Н	С	В
0	0	1	2	1	2	3	2	3	4
1	1	2	3	2	3	4	3	4	5
2	2	3	4	3	4	5	4	5	6
3	3	4	5	4	5	6	5	6	7
4	4	5	6	5	6	7	6	7	8

Обозначения: Н – низкий; С – средний; В – высокий

При ошибке оператора  $R = 1 * 1 = 1$ .

При хищении данных  $R = 2 * 1 = 2$ .

При сбоях в функционировании услуг интернет-провайдера

$R = 4 * 1 = 4$ .

3. Договоры со студентами и преподавателями.

Таблица 4

Определение вероятности возникновения угроз

Ценность актива	Уровень угрозы								
	низкий		средний					высокий	
	Н	С	В	Н	С	В	Н	С	В
0	0	1	2	1	2	3	2	3	4
1	1	2	3	2	3	4	3	4	5
2	2	3	4	3	4	5	4	5	6
3	3	4	5	4	5	6	5	6	7
4	4	5	6	5	6	7	6	7	8

Обозначения: Н – низкий; С – средний; В – высокий

При ошибке оператора  $R = 4 * 4 = 16$ .

При хищении данных  $R = 5 * 4 = 20$ .

При сбоях в функционировании услуг интернет-провайдера

$R = 7 * 4 = 28$ .

Таким образом, для всех активов наиболее вероятна угроза сбоев при реализации услуг интернет-провайдера (рис. 2).

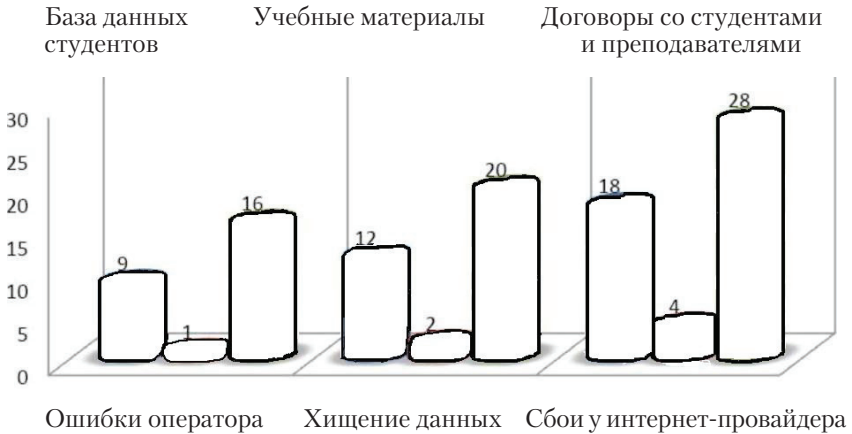


Рис. 2. Риски возникновения угроз для различных активов

### Основные вопросы защиты информации

Для нормального функционирования систем дистанционного образования необходимо разработать эффективную политику информационной безопасности.

В соответствии с выделенными функциональными подсистемами и субъектами типовой технологической процесс дистанционной обработки информации можно представить следующим образом:

- 1) подключение пользователя к веб-сайту;
- 2) предоставление пользователем регистрационных данных, необходимых для прохождения процедур идентификации и аутентификации и входа в личный кабинет;
- 3) авторизация пользователя на сервере LMS-платформы;
- 4) запрос на сервер на предоставление информации и доступа к ресурсам БД;
- 5) ввод, модификация или вывод информации;
- 6) отключение пользователя.

Наиболее уязвимыми с точки зрения информационной безопасности будут процессы:

- передачи идентификационных и аутентификационных данных пользователя;
- обмена данными между браузером удаленного пользователя и веб-сайтом;
- авторизации пользователя;

- извлечения и записи данных в БД ИС вуза;
- обмена данными между сервером LMS и сервером ИС вуза.

Проанализировав структуру системы дистанционного обучения, можно отметить, что необходимо уделять внимание безопасности с учетом следующих направлений:

- удаленная аутентификация студента;
- контроль доступа;
- обнаружение вторжения;
- защита сетевых коммуникаций;
- гарантированность доставки;
- защита хранилища данных.

Аутентификация студента может базироваться на традиционных парольных механизмах. Одно из возможных усовершенствований – использовать аутентификацию на основе местоположения с помощью постоянного IP-адреса или услуги обратного звонка, когда студенты подключаются к обучающей системе. Но эта стратегия имеет недостатки, например, удаленный студент вынужден всегда подключаться к образовательной системе из одного и того же места.

Более сложные схемы авторизации пользователя используют технологии смарт-карт для построения сильных систем авторизации с простым пользовательским интерфейсом. Их основное достоинство заключается в безопасном хранении и обработке секретной информации – ключевая конфиденциальная информация хранится только на смарт-карте и нигде больше. Основной недостаток смарт-карт перед парольными системами – это увеличение стоимости реализации процесса аутентификации.

После успешного подключения к системе доступ к информации должен быть проконтролирован с помощью электронных сертификатов, которые подтверждают прохождение студентом определенного этапа обучения и возможность перехода к следующему. Эти средства должны использоваться в дополнение к уже существующим средствам контроля доступа, предоставляемым операционной системой.

Система обнаружения вторжения может представлять собой систему мониторинга в режиме реального времени, которая сравнивает поведение авторизованного пользователя с прошлыми записями его поведения для определения подлинности пользователя. Такие записи могут состоять из ряда факторов, в числе которых время подключения к системе, использование различных сервисов и данные, к которым запрошен доступ. Этот подход полностью реализуем программными средствами и не требует дополнительных затрат.

Проблемы безотказности работы решаются общепринятыми методами, используемыми во всех компьютерных системах: резервное копирование и восстановление, физическая защита для учреждения обучающей системы и другие.

Рассмотрим требования к оборудованию и программному обеспечению, создающим условия для работы ИС Университета в дистанционном режиме. Согласно документу ФСТЭК России по определению угроз безопасности в ИС [Методика 2020], процесс определения ИБ должен охватывать все объекты защиты и сегменты в логических и физических границах системы. При этом рассматриваются следующие действия:

Сервер LMS: 1) перебор паролей и атаки на систему аутентификации пользователей; 2) повышение привилегий; 3) ошибки администрирования; 4) DDos и Dos-атаки; 5) сбои и отказы программно-аппаратных средств сервера.

БД: 1) SQL-инъекции; 2) несанкционированный доступ к БД и журналам транзакций; 3) кража персональных данных; 4) уничтожение БД в результате сбоя и отказов технических средств.

Для противодействия угрозам ИБ и удержания рисков в пределах допустимого используются различные механизмы и средства защиты информации организационно-правового, технического и программного характера, которые реализуют общую стратегию защиты информации. В соответствии с требованиями стандартов по защите информации в информационных системах защита должна строиться по следующим направлениям:

- использование специализированных средств защиты информации;
- контроль над безопасностью кода и наличием уязвимостей, своевременное обновление программного обеспечения;
- проведение периодического контроля уровня безопасности и выработка управляющих решений в области ИБ в случае необходимости.

К программно-технической платформе системы предъявляются следующие требования:

- возможность перераспределять ресурсы сети в случаях нарушения работоспособности отдельных элементов;
- модульная конструкция (возможность оперативной замены критичных элементов);
- средства администрирования и мониторинга, обеспечивающие оперативное получение информации о состоянии оборудования, оперативное извещение о возникновении сбойных ситуаций;

- обеспечение возможности использовать резервные системы электропитания.

Реализация вышеперечисленных требований осуществляется следующими средствами:

- многофакторные системы аутентификации, включая методы статической и динамической биометрии;
- шифрование данных;
- антивирусное программное обеспечение;
- VPN и защищенные протоколы передачи данных;
- межсетевые экраны;
- основной и резервный блоки питания с возможностью «горячей замены»;
- центральный процессор(ы) не ниже INTEL Xeon с поддержкой режима 64-битных вычислений (либо аналогичный);
- оперативная память не менее 4 Гб на один процессор;
- RAID-контроллер с поддержкой уровней RAID 0, 1, 1+0,5;
- основной и резервный сетевые адаптеры.

Требования к системному программному обеспечению на серверном оборудовании:

- MS Windows (не ниже версии Microsoft Windows 2003 Server Service Pack);
- Microsoft Hyper-V.

Перечень систем управления базами данных (СУБД), допустимых к использованию на серверном оборудовании:

- FireBird (не ниже версии 1.5);
- Oracle (не ниже версии 9i).

Перечень средств администрирования и мониторинга, допустимых к использованию:

- Altiris Server Management;
- стандартные средства администрирования и мониторинга операционных систем;
- специализированные средства администрирования и мониторинга, поставляемые производителями серверного оборудования и системного программного обеспечения.

Перечень программных средств резервного копирования, допустимых к использованию на серверном оборудовании:

- HP OpenView Storage Data Protector;
- стандартные средства резервного копирования операционных систем.

## Заключение

В настоящее время одним из важных направлений развития образовательных технологий является применение средств и систем дистанционного обучения. Актуальная задача обеспечения защиты информации в таких системах порождает множество требований, которые должны быть проанализированы и удовлетворены. Предоставление необходимого уровня безопасности и конфиденциальности является необходимым условием для нормального функционирования и дальнейшего развития систем дистанционного образования. Любая система дистанционного образования использует информационно-коммуникационные технологии и сети передачи данных, строится на базе информационной системы учебного заведения и представляет собой распределенное приложение с базой данных и web-интерфейсами. Нарушение безопасности системы в результате воздействий различной природы приводит и к нарушению образовательного процесса учебного заведения.

В соответствии с требованиями стандартов и регуляторов в области информационной безопасности защита должна строиться по следующим основным направлениям:

- использование высоконадежного оборудования и сертифицированного программного обеспечения;
- применение специализированных средств защиты информации;
- периодический контроль защищенности и выработка корректирующих действий в случае необходимости.

## Литература

---

- Готская, Жучков, Кораблев 2020 – Готская И.Б., Жучков В.М., Кораблев А.В. Аналитическая записка «Выбор системы дистанционного обучения» [Электронный ресурс]. URL: <http://ra-kurs.spb.ru/2/0/2/1/?id=13> (дата обращения 3 декабря 2020).
- Методика 2020 – Методика определения угроз безопасности информации в информационных системах // Официальный сайт ФСТЭК России [Электронный ресурс]. URL: <http://fstec.ru/component/attachments/download/812> (дата обращения 3 декабря 2020).
- Оладько, Бабенко, Алексина 2017 – Оладько В.С., Бабенко А.А., Алексина А.А. Оценка защищенности системы дистанционного образования вуза // Информационные технологии. 2017. Т. 2. № 1. С. 3–4.



## References

---

- Gotskaya, I.B., Zhuchkov, V.M. and Korablev, A.V. (2020), Analytical note “Choosing a distance learning system” [Online], available at: <http://ra-kurs.spb.ru/2/0/2/1/?id=13> (Accessed 3 December 2020).
- Method of determining the information security threats in information systems. The draft guidance document (2020), *Official site FSTEC Russia* [Online], available at: <http://fstec.ru/component/attachments/download/812> (Accessed 3 December 2020).
- Olad'ko, V.S., Babenko, A.A. and Aleksina, A.A. (2017), Security evaluation of the university distance education system, *Information Technologies*, vol. 2, no. 1, 2017, pp. 3–4.

### *Информация об авторе*

*Андрей В. Гавриленко*, кандидат технических наук, доцент, Московский экономический институт, Москва, Россия; 109390, Россия, Москва, ул. Артюхиной, д. 6, корп. 1; [agavr-51@yandex.ru](mailto:agavr-51@yandex.ru)

### *Information about the author*

*Andrei V. Gavrilenko*, Cand. of Sci. (Engineering), associate professor, Moscow Economical Institute, Moscow, Russia; bld. 6, Artyukhina Str., Moscow, Russia, 109390; [agavr-51@yandex.ru](mailto:agavr-51@yandex.ru)

## О геометрических свойствах псевдориманова многообразия Вселенной Гёделя

Екатерина О. Андроникова

*Московский государственный технологический университет  
«СТАНКИН», Москва, Россия, ya.kmatveyeva@yandex.ru*

*Аннотация.* В статье рассматривается псевдориманово многообразие типа Гёделя  $(M, \nabla)$  с нулевым кручением. Обсуждается целесообразность исследования геометрических свойств, в частности поведение геодезических линий в обобщенных цилиндрических координатах, вводимых на аналитическом многообразии  $M$ . Приводятся четыре первых интеграла системы уравнений геодезических линий в декартовой системе координат. Проясняется физический смысл постоянных интегрирования. В результате полного интегрирования системы уравнений геодезических линий в декартовой системе координат выявляются пять семейств геодезических линий в псевдоримановом пространстве аффинной связности типа Гёделя  $(M, \nabla)$ . Далее Вселенная Гёделя исследуется как однородное пространство. С четырехмерной группой Ли  $G$ , действующей транзитивно на  $(M, \nabla)$ , ассоциируется групповое пространство аффинной связности Эли Картана  $(M, \bar{\nabla})$  с нулевым тензорным полем кривизны. В явном виде выведены формулы, описывающие параллельные переносы и геодезические линии в  $(M, \bar{\nabla})$ . Алгебра Ли группы Ли  $G$  рассматривается как касательная алгебра к  $(M, \bar{\nabla})$ . Компоненты тензора деформации  $S(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$  аффинных связностей  $\nabla$  и  $\bar{\nabla}$  приводятся в явном виде. Прямым вычислением доказывается, что тензор деформации  $S$  параллелен относительно  $\bar{\nabla}$ , т. е. исходное псевдориманово многообразие  $(M, \nabla)$  оказывается жестким по отношению к аффинной связности  $\bar{\nabla}$ . Уточнены свойства тензорного поля кривизны  $R$  в  $(M, \nabla)$ , выражена его первая ковариантная производная в  $(M, \nabla)$  через  $R$  и тензор деформации  $S$  связностей  $\nabla$  и  $\bar{\nabla}$ , выведены дополнительные дифференциально-геометрические тождества, связывающие тензорные характеристики пространств аффинной связности  $(M, \nabla)$  и  $(M, \bar{\nabla})$ . С применением конструкции Эли Картана вводится в рассмотрение симметрическая аффинная связность  $\bar{\nabla}$ , имеющая одинаковые геодезические линии с сохранением канонического параметра  $s$   $(M, \bar{\nabla})$ . Это позволяет глубже выявить дифференциально-геометрические свойства псевдориманова многообразия типа Гёделя  $(M, \nabla)$ .

*Ключевые слова:* пространства аффинной связности, псевдоримановы многообразия, Вселенная Гёделя, однородные пространства, группы и алгебры Ли, геодезические линии

*Для цитирования:* Андроникова Е.О. О геометрических свойствах псевдориманова многообразия Вселенной Гёделя // Вестник РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика». 2021. № 1. С. 66–80. DOI: 10.28995/2686-679X-2021-1-66-80

## On geometric properties of the pseudo-Riemannian manifold of the Gödel Universe

Ekaterina O. Andronikova

*Moscow State University of Technology "STANKIN",  
Moscow, Russia, ya.kmatveyeva@yandex.ru*

*Abstract.* The paper considers the pseudo-Riemannian manifold of the Gödel type  $(M, \nabla)$  with zero torsion. It discusses the expediency of studying geometric properties, in particular, the behavior of geodesic lines, in the generalized cylindrical coordinates introduced in the analytical manifold  $M$ . The first four integrals of the geodesic lines system of equations in the Cartesian coordinate system are given. The author clarifies the physical meaning of integration constants. Resulting from the complete integration of the geodesic lines system of equations in the Cartesian coordinate system, five families of geodesic lines are identified in the pseudo-Riemannian space of affine connection of the Gödel type  $(M, \nabla)$ . Further, she studies the Gödel universe as a homogeneous space. The group affine connected space of E. Cartan with the zero tensor field of curvature  $(M, \bar{\nabla})$  is associated with the four-dimensional Lie group  $G$ , transitive acting on  $M$ . Formulas, describing parallel translations and geodesic lines in  $(M, \bar{\nabla})$ , are explicitly derived. The Lie algebra of a Lie group  $G$  is considered as the tangent algebra of  $(M, \bar{\nabla})$ . The components of the deformation tensor  $S(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$  of the affine connections  $\nabla$  and  $\bar{\nabla}$  are given in an explicit form. A straight-line calculation proves that the deformation tensor  $S$  is parallel with respect to  $\bar{\nabla}$ , that is, the original pseudo-Riemannian manifold  $(M, \nabla)$  turns out to be rigid with respect to affine connection  $\bar{\nabla}$ . This approach allows refining the properties of the tensor field of curvature  $R$  in  $(M, \nabla)$  and expressing its first covariant derivation in terms of  $R$  and the deformation tensor  $S$  of the connections  $\nabla$  and  $\bar{\nabla}$ , as well as deriving some additional differential geometric identities connecting the tensor characteristics of spaces of affine connection  $(M, \nabla)$  and  $(M, \bar{\nabla})$ . Applying the E. Cartan construction, the author introduces a symmetric affine connection  $\tilde{\nabla}$  that has the same geodesic lines with the pres-

ervation of the canonical parameter with  $(M, \bar{\nabla})$ . That allows revealing more deeply the differential-geometric properties of the pseudo-Riemannian the Gödel – type manifold  $(M, \nabla)$ .

*Keywords:* affine connected spaces, pseudo-Riemannian manifolds, Gödel universe, homogeneous spaces, Lie groups and algebras, geodesic lines

*For citation:* Andronikova, E.O. (2021), “On geometric properties of the pseudo-Riemannian manifold of the Gödel Universe”, *RSUH/RGGU Bulletin. “Informatics. Information security. Mathematics” Series*, vol. 1, pp. 66–80, DOI: 10.28995/2686-679X-2021-1-66-80

## Введение

В 1949 г. выдающийся австрийский математик Курт Гёдель построил пример метрического тензорного поля сигнатуры  $(+, +, +, -)$  [Gödel 1949] в тесной связи с решениями уравнений Эйнштейна в общей теории относительности.

Вселенная Гёделя обладает некоторыми замечательными не только физическими, но и геометрическими свойствами. В работах [Матвеева 2013], [Андроникова 2017] приводилось описание некоторых аспектов геометрии Вселенной Гёделя.

С помощью пакетов программ «Математика-9» и “Maple” вычислены компоненты символов Кристоффеля второго рода, а также компоненты тензоров кривизны Риччи, Эйнштейна, Вейля, первой ковариантной производной тензора кривизны (тензорное поле кручения тождественно равно нулю). Скалярная кривизна пространства Гёделя постоянна и положительна. Псевдориманово многообразии Вселенной Гёделя не является пространством постоянной кривизны, поскольку есть ненулевые компоненты первой ковариантной производной тензора кривизны. Тензор Вейля имеет ненулевые компоненты; это указывает на то, что пространство Гёделя не допускает геодезическое отображение на плоское пространство-время Минковского. Геодезическое отображение переводит геодезическую линию одного пространства аффинной связности в геодезическую линию другого пространства аффинной связности с сохранением или без сохранения канонического (аффинного) параметра. Здесь мы опираемся на результаты классической теории проективных отображений многообразий аффинной связности [Аминова 2002]. Поскольку среди компонент первых ковариантных производных тензора кривизны очень много нулевых значений, то можно считать, что пространство Гёделя относится к классу пространств, близких к симметрическим [Матвеев, Нестеренко 2012].

### Геодезические линии Вселенной Гёделя

Геодезические линии псевдориманова лоренцева многообразия Гёделя  $(M, \nabla)$  привлекали внимание многих исследователей. Многим физикам, включая Альберта Эйнштейна, показался удивительным тот факт, что через каждую точку (событие) проходит замкнутая геодезическая линия. Физическое осмысление этой ситуации приводило к неожиданным выводам. Было высказано предложение отбросить пример Курта Гёделя как постороннее решение уравнения Эйнштейна. Здесь мы не имеем возможности включиться в эту дискуссию, просто изучаем с математической точки зрения геометрию Вселенной Гёделя. В работах [Kavuk 2005], [Андроникова 2017] проводится интегрирование уравнений геодезических линий в различных системах координат.

Рассмотрим подробнее псевдориманово лоренцево многообразие типа Гёделя  $(M, \nabla)$  с первой фундаментальной квадратичной формой

$$ds^2 = (dt)^2 - (dx)^2 + \frac{1}{2} \exp(2\sqrt{2}\omega x)(dy)^2 + 2\exp(\sqrt{2}\omega x)dtdy - (dz)^2, \quad (1)$$

где  $\omega$  – положительная постоянная.

Приведем уравнения геодезических линий в метрике Гёделя (1):

$$\begin{cases} t'' = -\sqrt{2}\omega x'(2t' + \exp(\sqrt{2}\omega x)y'), \\ x'' = -\frac{1}{\sqrt{2}}\omega \exp(\sqrt{2}\omega x)y'(2t' + \exp(\sqrt{2}\omega x)y'), \\ y'' = 2\sqrt{2}\omega \exp(-\sqrt{2}\omega x)t'x', \\ z'' = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $t' = \frac{dt}{du}$  „ u-аффинный параметр вдоль геодезической линии, аналогично производные от  $x, y, z$  берутся по  $u$ .

Первый интеграл этой системы уравнений геодезических линий имеет вид:

$$(t')^2 + 2\exp(\sqrt{2}\omega x)t'y' - (x')^2 + \frac{1}{2} \exp(2\sqrt{2}\omega x)(y')^2 - (z')^2 = \epsilon k^2 = const., \quad (3)$$

где индекс  $\varepsilon$  принимает значения  $-1$  (времениподобная геодезическая линия),  $0$  (изотропная),  $1$  (пространственноподобная).

*Замечание.* В некоторых источниках исходная фундаментальная квадратичная форма (1) рассматривается с обратным знаком. Естественно, в этом случае времениподобная геодезическая линия становится пространственноподобной и наоборот.

Подробно проведено исследование поведения геодезических линий во Вселенной Гёделя в обобщенных цилиндрических координатах (см., например: [Kavuk 2005]). Если провести замену координат  $(t, x, y, z)$  на  $(t', r, \varphi, z)$  по следующим формулам, где  $t'$  изменяется от минус бесконечности до плюс бесконечности,  $r$  – отрицательно,  $\varphi$  рассматривается от нуля до  $2\pi$ :

$$\begin{aligned} \exp(\sqrt{2\omega}x) &= \operatorname{ch}2r + \cos\varphi\operatorname{sh}2r; \quad \omega\exp(\sqrt{2\omega}x) = \sin\varphi\operatorname{sh}2r; \quad (4) \\ \operatorname{tg}(0,5(\varphi + \omega t - \sqrt{2}t')) &= \exp(-2r) \operatorname{tg}(0,5\varphi), \quad z = z, \end{aligned}$$

то метрика с обратным знаком по сравнению с (1) принимает вид:

$$ds^2 = 2\omega^{-2}(-(dt')^2 + (dr)^2 - (\operatorname{sh}^4 r - \operatorname{sh}^2 r)(d\varphi)^2 + 2\sqrt{2}\operatorname{sh}^2 r(d\varphi)(dt') + (dz)^2). \quad (5)$$

Понятно, что здесь штрих по  $t$  обозначает новую координату, а не дифференцирование.

Недостатком такого рассмотрения, на наш взгляд, является неравноправное описание различных событий в пространстве-времени Вселенной Гёделя, поскольку при  $r$ , равном нулю, данная система координат имеет особенность.

В работе [Андроникова 2017] опубликованы результаты полного интегрирования системы (2) в элементарных функциях в системе координат  $(t, x, y, z)$ , но не было произведено уточнение физического смысла констант интегрирования. После устранения этого недостатка приходим к следующему результату.

*Теорема 1.* В псевдоримановом лоренцевом многообразии типа Гёделя  $(M, \nabla)$  с первой фундаментальной квадратичной формой (1) первые интегралы системы уравнений геодезических линий (2) выражаются равенством (3) и следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} 2t' + 2e^{\sqrt{2\omega}x}y' &= p_1 = \operatorname{const.}, \quad (1.6) \\ e^{2\sqrt{2\omega}x} + 2e^{\sqrt{2\omega}x}t' &= p_3 = \operatorname{const.}, \quad (1.7) \\ -2z' &= p_4 = \operatorname{const.} \quad (1.8) \end{aligned}$$

Постоянную  $k^2$  можно трактовать как полную энергию светового сигнала, движущегося по соответствующей геодезической линии. Константы  $p_1, p_3, p_4$  можно интерпретировать как обобщенные импульсы, отвечающие соответственной координате.

Система уравнения геодезических линий (2) допускает следующие 5 семейств решений:

$$\begin{cases} t = c_1, \\ x = c_2 u + c_3, \quad c_1 - c_6 - \text{произвольные постоянные.} \\ y = c_4, \\ z = c_5 u + c_6; \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} t = -\frac{m}{2} u + \delta_1, \\ x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} u \sqrt{b^2 - m^2} + \delta_2, \\ y = \mp \frac{m}{\omega \sqrt{b^2 - m^2}} \exp(\mp \omega u \sqrt{b^2 - m^2} + \delta_2), \\ z = \delta_3 u + \delta_4. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь  $b^2 - m^2 > 0$ ,  $b, m, \delta_1 - \delta_4$  – константы,  $2b^2 = (p_1)^2 - (p_4)^2 - 4\epsilon k$ ,  $m = 2p_1$ .

$$\begin{cases} t = -\frac{p_1}{2} u + \frac{2}{\omega} \arctg[p_1 \omega (u + u_0)] + t_0, \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}\omega} \ln \frac{p_3 (1 + p_1^2 \omega^2 (u + u_0)^2)}{2p_1}, \\ y = -\frac{2p_1^2}{p_3} \frac{u + u_0}{1 + p_1^2 \omega^2 (u + u_0)^2} + y_0, \\ z = -\frac{p_4}{2} u + z_0. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь  $p_1 p_3 > 0$ ;  $p_1^2 + p_4^2 = 4k^2$ ;  $\epsilon = -1$ .  $a = -(p_1^2 + p_4^2 + 4\epsilon k^2)$ .

$$\begin{cases} t = -\frac{p_1}{2} u - \sqrt{-a} \ln \left| \frac{-2p_1 \operatorname{tg} \frac{\mu(u+u_0)}{2} \pm \sqrt{4p_1^2 + 2a - \sqrt{-a}}}{-2p_1 \operatorname{tg} \frac{\mu(u+u_0)}{2} \pm \sqrt{4p_1^2 + 2a + \sqrt{-a}}} \right| + t_0, \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}\omega} \ln \frac{p_3 \left( -2p_1 \pm \sqrt{4p_1^2 + 2a} \sin[\mu(u+u_0)] \right)}{a}, \\ y = \pm \frac{\sqrt{2p_1^2 + a} \cos(\mu(u+u_0))}{\omega \sqrt{-a} p_3 \left( -2p_1 \pm \sqrt{4p_1^2 + 2a} \sin[\alpha(u+u_0)] \right)} + y_0, \\ z = -\frac{p_4}{2} u + z_0. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь  $a = -(p_1^2 + p_4^2 + 4\epsilon k^2)$  отрицательно,  $\mu = \frac{\omega\sqrt{-a}}{\sqrt{2}} = \text{const}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} t = -\frac{p_1}{2}u \pm \frac{\sqrt{2a}}{\beta} \arctg \left[ \frac{e^{\pm\beta(u+u_0)} - 4p_1p_3}{2\sqrt{2a}p_3} \right] + t_0, \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}\omega} \ln(e^{\pm\beta(u+u_0)} + 8p_3^2(2p_1^2 + a)e^{\mp\beta(u+u_0)} - 8p_1p_3) - \ln a - 2\ln 2, \\ y = \pm \frac{4a}{\beta} \cdot \frac{-p_1e^{\pm\beta(u+u_0)} + 2p_3(2p_1^2 + a)}{(e^{\pm\beta(u+u_0)} - 4p_1p_3)^2 + 8ap_3^2} + y_0, \\ z = -\frac{p_4}{2}u + z_0 \end{array} \right. \quad (13)$$

Здесь  $a = -(p_1^2 + p_4^2 + 4\epsilon k^2)$  положительно,  $\beta = \frac{\omega a}{\sqrt{2}}$ .

Знаки во всех этих формулах берутся одновременно либо верхние, либо нижние.

### *Псевдориманово многообразие Гёделя как однородное пространство*

Если фиксированы две произвольные точки многообразия  $M$ , то существует одно преобразование группы Ли  $G$ , переводящее первую точку во вторую. Любое преобразование группы  $G$  является автоморфизмом пространства аффинной связности  $(M, \nabla)$ , т. е. сохраняет геометрическую структуру Вселенной Гёделя и, следовательно, в частности, переводит геодезические линии в геодезические линии. Все геодезические луны в  $(M, \nabla)$  изоморфны.

Рассматриваются две четырехмерные аффинные связности, ассоциированные с пространством Гёделя, одна из этих связностей порождается группой Ли  $G$ , действующей в псевдоримановом многообразии Гёделя. Вторая аффинная связность – симметрическая. Она возникает в силу конструкции Эли Картана. Исследуются свойства параллельных переносов и гомотетий этих пространств аффинной связности.

В координатах  $(t, x, y, z)$  метрический тензор псевдориманова многообразия Гёделя задан следующим образом:

$$(g_{ij})_{i,j=1}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^{\sqrt{2}\omega x} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ e^{\sqrt{2}\omega x} & 0 & \frac{1}{2}e^{2\sqrt{2}\omega x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (14)$$



Ненулевые компоненты символов Кристоффеля второго рода имеют вид [Kavuk 2005], [Андроникова 2017]:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \sqrt{2}\omega, \\
 \Gamma_{32}^1 &= \Gamma_{23}^1 = \left(\sqrt{2}\right)^{-1} \exp(\sqrt{2}\omega x)\omega, \\
 \Gamma_{31}^2 &= \Gamma_{13}^2 = \left(\sqrt{2}\right)^{-1} \exp(\sqrt{2}\omega x)\omega, \\
 \Gamma_{33}^2 &= \left(\sqrt{2}\right)^{-1} \exp(2\sqrt{2}\omega x)\omega, \\
 \Gamma_{12}^3 &= \Gamma_{21}^3 = -\sqrt{2} \exp(-\sqrt{2}\omega x)\omega.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Здесь переменные  $t, x, y, z$  занумерованы в алфавитном порядке.

В первоначальной системе координат, в которой задается исходная метрика (1), преобразование группы  $G$ , переводящее точку  $s$  с координатами  $(t, x, y, z)$  в точку  $(t', x', y', z')$ , имеет вид [Синг 1963]:

$$\begin{cases}
 t' = t + \alpha \\
 x' = x + \delta \\
 y' = ye^{-\sqrt{2}\omega\delta} + \beta \\
 z' = z + \gamma
 \end{cases}
 \tag{16}$$

Здесь  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  – постоянные.

Рассмотрим пространство аффинной связности  $(M, \bar{\nabla})$  Эли Картана, соответствующее группе  $G$ .

Согласно формулам (16), преобразование параллельного переноса (левый сдвиг геодезической группы  $G$ )  $\bar{L}_b^a$ , переводящее точку  $a(t_0, x_0, y_0, z_0)$  в точку  $b(t_1, x_1, y_1, z_1)$ , переводит точку  $c(t, x, y, z)$  в точку  $\bar{L}_b^a c$ :

$$\bar{L}_b^a c = \overline{Exp}_b(\bar{\tau}_b^a(\overline{Exp}_a^{-1} c)),
 \tag{17}$$

где  $\overline{Exp}$  – обозначение экспоненциального отображения в  $(M, \bar{\nabla})$ ,  $\bar{\tau}_b^a: T_a(M) \rightarrow T_b(M)$  – параллельный перенос вдоль единственной геодезической в  $(M, \bar{\nabla})$ , соединяющей точки  $a$  и  $b$ ,  $T_a(M)$  – касательное пространство в точке  $a$  к многообразию  $M$ .  $\bar{L}_b^a c$  имеет координаты:

$$\bar{L}_b^a c (t + t_1 - t_0; x + x_1 - x_0; (y - y_0)e^{\sqrt{2\omega}(x_0 - x_1)} + y_1; z_2 + z_1 - z_0). \quad (18)$$

Компоненты символов Кристоффеля второго рода  $\bar{\Gamma}_{jk}^i$  связности  $\bar{\nabla}$  находятся по формуле [Матвеев, Нестеренко 2012]:

$$\bar{\Gamma}_{jk}^i (a) = - \frac{\partial^2 (\bar{L}_b^a c)^i}{\partial b^j \partial c^k} \Big|_{\substack{b = a \\ c = a}}. \quad (19)$$

Единственная ненулевая компонента из символов Кристоффеля второго рода аффинной связности  $\bar{\nabla}$  имеет вид:

$$\bar{\Gamma}_{23}^3 = \sqrt{2\omega}. \quad (20)$$

Ненулевые компоненты тензора кручения  $\bar{T}_{jk}^i$  в  $(M, \bar{\nabla})$  следующие:

$$\bar{T}_{23}^3 = -\bar{T}_{32}^3 = \sqrt{2\omega}. \quad (21)$$

Тензор кривизны связности  $\bar{\nabla}$  тождественно равен нулю:  $\bar{R} = 0$ , кроме того,  $\bar{\nabla}T = 0$ .

Геодезические линии пространства  $(M, \bar{\nabla})$  определяются системой уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 t}{du^2} = 0; \\ \frac{d^2 x}{du^2} = 0; \\ \frac{d^2 y}{du^2} + \sqrt{2\omega} \frac{dx}{du} \frac{dy}{du} = 0, \\ \frac{d^2 z}{du^2} = 0, \end{array} \right. \quad (22)$$

здесь  $u$ -аффинный (канонический) параметр вдоль геодезической.

Пусть  $u_a b = \overline{Exp_a}(u(\overline{Exp_a})^{-1}b)$ , т. е.  $\{u_a b\}_{u \in \mathbf{R}}$ ,  $\mathbf{R}$ -поле действительных чисел; геодезическая линия, соединяющая точки  $a (t_0, x_0, y_0, z_0)$  и  $b (t_1, x_1, y_1, z_1)$ , при  $u = 0$  выходит из точки  $a$  и при  $u = 1$  входит в точку  $b$ .

Система (22) имеет два семейства решений:

если  $x_0 = x_1$ , то

$$u_a b((1-u)t_0 + ut_1, x_0, (1-u)y_0 + uy, (1-u)z_0 + uz), \quad (23)$$

если  $x_0 \neq x_1$ , то

$$u_a b((1-u)t_0 + ut_1, (1-u)x_0 + ux, \frac{(y_1 - y_0)(e^{\sqrt{2}\omega(x_0 - x_1)u} - 1)}{e^{\sqrt{2}\omega(x_0 - x_1)} - 1} + y_0, (1-u)z_0 + uz). \quad (24)$$

Опишем алгебру Ли, соответствующую группе Ли  $G$ . Определим кососимметричную бинарную операцию

$$[X, Y] = -\bar{T}(X, Y), \quad (25)$$

где  $X (X^1, X^2, X^3, X^4)$ ;  $Y (Y^1, Y^2, Y^3, Y^4)$  – гладкие векторные поля на аналитическом многообразии  $M$ . С учетом формулы (21) получаем:

$$\begin{aligned} [X, Y]^1 &= 0; [X, Y]^2 = 0; \\ [X, Y]^3 &= -\bar{T}_{23}^3 X^2 Y^3 - \bar{T}_{32}^3 X^3 Y^2 = \sqrt{2}\omega(-X^2 Y^3 + X^3 Y^2); [X, Y]^4 = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Если в четырехмерном касательном пространстве  $T_a(M)$  выбрать базис  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ , то можно считать, что  $[\bar{e}_1, \bar{e}_2] = \bar{0}$ ;  $[\bar{e}_1, \bar{e}_3] = \bar{0}$ ;

$$[\bar{e}_1, \bar{e}_4] = \bar{0}; [\bar{e}_2, \bar{e}_3] = -\sqrt{2}\omega\bar{e}_3; [\bar{e}_2, \bar{e}_4] = \bar{0}; [\bar{e}_3, \bar{e}_4] = \bar{0}. \quad (27)$$

Определим тензорное поле  $S$  на  $M$  типа (2, 1) следующей формулой:

$$S(X, Y) = \bar{\nabla}_x Y - \nabla_x Y, \quad (28)$$

где  $X, Y$  – гладкие векторные поля на  $M$ .

Компоненты тензора  $S$  имеют вид:

$$(S^1_{ij})^4_{i,j=1} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2}\omega & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}\omega & 0 & -\frac{\omega}{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}\omega x} & 0 \\ 0 & -\frac{\omega}{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}\omega x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 (S_{ij}^2)_{i,j=1}^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\omega}{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}\alpha x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\omega}{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}\alpha x} & 0 & -\frac{\omega}{\sqrt{2}}e^{2\sqrt{2}\alpha x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 (S_{ij}^3)_{i,j=1}^4 &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\omega e^{-\sqrt{2}\alpha x} & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\omega e^{-\sqrt{2}\alpha x} & 0 & \sqrt{2}\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 (S_{ij}^4)_{i,j=1}^4 &= 0.
 \end{aligned}$$

Здесь первый индекс  $i$  – номер строки матрицы, а второй индекс  $j$  – номер столбца матрицы,  $S_{ij}^k = \bar{\Gamma}_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k$ .

Непосредственно вычисляется, что  $\bar{\nabla} S = 0$ ,  $\bar{\nabla}_k S_{ij}^m = \partial_k S_{ij}^m + \bar{\Gamma}_{k\alpha}^m S_{ij}^\alpha - \bar{\Gamma}_{ki}^\beta S_{\beta j}^m - \bar{\Gamma}_{kj}^\beta S_{i\beta}^m$ , здесь  $\partial_k$  – частная производная по  $k$ -ой переменной,  $1 \leq i, j, k, m \leq 4$ .

Согласно определению, введенному Б. Костантом (см., например, [Матвеев, Нестеренко 2012]), аффинная связность  $\nabla$  называется жесткой относительно  $\bar{\nabla}$ , если их тензор деформации  $S(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$  параллелен относительно  $\bar{\nabla}$ , т. е.  $\bar{\nabla} S = 0$ .

*Теорема 2.* Псевдориманово многообразие  $(M, \nabla)$  типа Гёделя с метрикой (1) является жестким относительно группового пространства аффинной связности  $(M, \bar{\nabla})$ , причем  $\nabla \bar{T} = 0, \bar{R} = 0, \bar{\nabla} S = 0$ , где  $\bar{T}$  – тензорное поле кручения в  $(M, \bar{\nabla})$ ,  $\bar{R}$  – тензорное поле кривизны в  $(M, \bar{\nabla})$ ,  $S$  – тензор деформации.

*Следствие.* Имеют место следующие формулы:

$$R(X, Y)Z = S(X, S(Y, Z)) - S(Y, S(X, Z)) - S(\bar{T}(X, Y), Z); \tag{29}$$

$$\bar{T}(X, Y) = S(X, Y) - S(Y, X); \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
 S(S(X, Y), Z) + S(S(Z, X), Y) + S(S(Y, Z), X) &= S(S(Y, X), Z) + \\
 + S(S(Z, Y), X) + S(S(X, Z), Y); & \tag{31}
 \end{aligned}$$

$$(\nabla_w S)(X, Y) = S(SW, X), Y) + S(X, S(W, Y)) - S(W, S(X, Y)); \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
 (\nabla_w R)(X, Y, Z) &= R(S(W, X), Y)Z + R(X, S(W, Y))Z + R(X, Y)S(W, Z) - \\
 - S(W, R(X, Y)Z). & \tag{33}
 \end{aligned}$$

Согласно конструкции Эли Картана, рассмотрим симметрическое пространство аффинной связности  $(M, \tilde{\nabla})$ , ассоциированное с групповым пространством  $(M, \bar{\nabla})$ :

$$\tilde{\nabla}_x Y = \bar{\nabla}_x Y - \frac{1}{2} \bar{T}(X, Y).$$

Многообразия аффинной связности  $(M, \tilde{\nabla})$ ,  $(M, \bar{\nabla})$  имеют одни и те же геодезические линии с сохранением аффинного параметра. Тензорное поле кручения  $\tilde{T}$  в  $(M, \tilde{\nabla})$  равно нулю, а тензорное поле кривизны  $\tilde{R}$  ковариантно постоянно:  $\tilde{T} = 0$ ;  $\tilde{\nabla}\tilde{R} = 0$ .

Ненулевые компоненты символов Кристоффеля второго рода аффинной связности  $\tilde{\nabla}$  имеют вид:

$$\hat{\Gamma}_{32}^3 = \hat{\Gamma}_{23}^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \omega. \quad (34)$$

В координатах  $(t, x, y, z)$  компоненты символов Кристоффеля второго рода аффинной связности  $\tilde{\nabla}$  имеют выражение.

$$\hat{\Gamma}_{ij}^h = \frac{\sqrt{2}\omega}{2} \delta_3^h (\delta_i^2 \delta_j^3 + \delta_j^2 \delta_i^3), \quad (35)$$

$$1 \leq i, j, h \leq 4, \delta_i^h = \begin{cases} 1, \text{при } h = i \\ 0, \text{при } h \neq i \end{cases}$$

Тензор кривизны в  $(M, \tilde{\nabla})$  выражается через тензор кручения в  $(M, \bar{\nabla})$ :

$$\tilde{R}(X, Y)Z = \frac{1}{4} \bar{T}(Z, (\bar{T}(X, Y))). \quad (36)$$

В координатах  $(t, x, y, z)$  имеем:

$$\bar{T}_{ij}^h = \sqrt{2}\omega \delta_3^h (\delta_i^2 \delta_j^3 - \delta_i^3 \delta_j^2); \quad (37)$$

$$\bar{T}_{ij}^h = \sqrt{2}\omega \delta_3^h (\delta_i^2 \delta_j^3 - \delta_i^3 \delta_j^2); \quad (38)$$

$$\tilde{R}_{i,j,k}^h = \frac{\omega^2}{2} \delta_3^h \delta_k^2 (\delta_i^2 \delta_j^3 - \delta_i^3 \delta_j^2). \quad (39)$$

Ненулевые компоненты тензора кривизны имеют вид:

$$\tilde{R}_{2,3,2}^3 = -\tilde{R}_{3,2,2}^3 = \frac{\omega^2}{2}. \quad (40)$$

Ковариантная производная в  $(M, \tilde{\nabla})$  тензора кривизны исходного пространства  $(M, \nabla)$  имеет выражение:

$$2(\tilde{\nabla}_W R)(X, Y, Z) = R(\tilde{T}(W, X), Y)Z + R(X, \tilde{T}(W, Y))Z + R(X, Y)\tilde{T}(W, Z) - \tilde{T}(W, R(X, Y)Z). \quad (41)$$

### *Заключение*

В настоящее время усилился интерес к проблематике Единого поля как со стороны физиков, так и со стороны математиков ([Шикин, Ющенко 2011], [Ozsvath, Schucking 2003], [Kavuk 2005]). Вселенная Гёделя  $(M, \nabla)$  по своим геометрическим параметрам не является симметрическим пространством аффинной связности, но попадает в класс пространств, близких к симметрическим [Матвеев, Нестеренко 2012]. Это происходит прежде всего потому, что оно является однородным пространством, т. е. на нем транзитивно действует четырехмерная группа Ли  $G$ . Рассматривая псевдориманово многообразие Гёделя  $(M, \nabla)$  как однородное пространство, привлекая групповую и симметрическую аффинные связности, мы уточняем свойства тензорных характеристик исходного пространства  $(M, \nabla)$ . Такой подход к исследованию геометрических свойств псевдориманова многообразия типа Гёделя позволяет вывести полезные дифференциально-геометрические тождества, связывающие, в частности, тензор кривизны и его первую ковариантную производную в исходном псевдоримановом многообразии Гёделя  $(M, \nabla)$ .

### *Благодарность*

В заключение выражаю искреннюю глубокую благодарность за постановку задачи, большое внимание и постоянную помощь в разработке проблематики доктору физико-математических наук, профессору, заведующей кафедрой «Прикладная математика» Московского государственного технологического университета «СТАНКИН» Л.А. Уваровой.

### *Acknowledgements*

In conclusion, I express my sincere deep gratitude for the formulation of the problem, great attention and constant assistance in the development of problems to L.A. Uvarova, the Doctor in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department “Applied Mathematics” of the Moscow State Technological University “STANKIN”.

### *Литература*

---

- Аминова 2002 – *Аминова А.В.* Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. М.: Янус-К, 2002. 619 с.
- Андроникова 2017 – *Андроникова Е.О.* О геометрических свойствах вселенной Гёделя // Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-математика». 2017. № 1. С. 51–56.
- Андроникова 2017 – *Андроникова Е.О.* О возможности моделирования телепортации световых сигналов в искривленных пространствах – времени типа Гёделя // Математические модели в исследованиях гуманитарных проблем. М.: Янус-К, 2017. С. 48–51.
- Матвеев, Нестеренко 2012 – *Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л.* Универсальные алгебры в теории пространств аффинной связности, близких к симметрическим. М.: МГОУ, 2012.
- Матвеева 2013 – *Матвеева Е.О.* Квантово-информационный подход к распространению сигналов во Вселенной Гёделя // Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-математика». 2013. № 2. С. 34–38.
- Синг 1963 – *Синг Дж.Л.* Общая теория относительности. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963.
- Шикин, Ющенко 2011 – *Шикин Г.Н., Ющенко Л.П.* Энергетический спектр заряженных скалярных частиц во вселенной Гёделя // Вестник РУДН. 2011. № 3. С. 112–118.
- Gödel 1949 – *Gödel K.* An example of a new type of cosmological solution of Einstein's field equations of gravitation // *Reviews of Modern Physics*. 1949. Vol. 21. P. 447–450.
- Kavuk 2005 – *Kavuk M.* Gödel Spacetime. MS Thesis. Middle East Technical University [Электронный ресурс], URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.633.2446&rep=rep1&type=pdf> (дата обращения 10 декабря 2020).
- Ozsvath, Schucking 2003 – *Ozsvath I., Schucking E.* Gödel's Trip // *American Journal of Physics*. 2003. Vol. 71. P. 801–805.

## References

---

- Aminova, A.V. (2002), *Proyektivnye preobrazovaniya psevdorimanovykh mnogoobraziy* [Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds], Yanus-K, Moscow, Russia.
- Andronikova, E.O. (2017) “On geometric properties of the Gödel Universe”, *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, no. 1, pp. 51–56.
- Andronikova, E.O. (2017), “On the possibility of modeling the teleportation of the light signals in curved space-time of the Gödel type”, *Matematicheskie modeli v issledovaniyakh gumanitarnykh problem* [Mathematical Models in Studies of Humanitarian Problems], Yanus-K, Moscow, Russia, pp. 48–51.
- Gödel, K. (1949), “An example of a new type of cosmological solution of Einstein’s field equations of gravitation”, *Reviews of Modern Physics*, vol. 21, pp. 447–450.
- Kavuk, M. (2005), Gödel Spacetime, MS Thesis, Middle East Technical University, Turkey, [Online], available at: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.633.2446&rep=rep1&type=pdf> (Accessed 10 December 2020).
- Matveev, O.A. and Nesterenko, E.L. (2012), *Universal’nye algebrы v teorii prostranstv affinnoi svyaznosti, blizkikh k simmetricheskim* [Universal algebras in the theory of close-to symmetric spaces with affine connection], MRSU, Moscow, Russia.
- Matveeva, E.O. (2013), “The quantum-information approach to the distribution of signals in the Gödel Universe”, *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 34–38.
- Ozsvath, I. and Schucking, T. (2003), “Gödel’s Trip”, *American Journal of Physics*, vol. 71, pp. 801–805.
- Shikin, G.N. and Yushchenko, L.P. (2011), “The energy spectrum of charged scalar particles in the Gödel universe”, *Bulletin of Peoples’ Friendship University of Russia. Series: Mathematics. Physics*, 2011, no. 3, pp. 112–118.
- Synge, J.L. (1963), *Obshchaya teoriya otноситel’nosti* [Relativity: The General Theory], Izdatel’stvo inostrannoi literatury, Moscow, Russia.

### Информация об авторе

Екатерина О. Андроникова, аспирант, Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», Москва, Россия; 127994, Россия, Москва, Вадковский пер., д. 1; ya.kmatveyeva@yandex.ru

### Information about the author

Ekaterina O. Andronikova, postgraduate student, Moscow State University of Technology “STANKIN”, Moscow, Russia; bld. 1, Vadkovskii Lane, Moscow, Russia, 127994; ya.kmatveyeva@yandex.ru



*Памяти солдат Победы*

Мой Г.Г. Чёрный.  
Путь солдата. Некоторые задачи  
аэромеханики и газовой динамики в XX в.  
Классика аналитики

Андрей Н. Богданов  
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия,  
bogdanov@imec.msu.ru

*Аннотация.* В статье рассказывается о жизни и основных направлениях научных исследований выдающегося советского и российского ученого в области механики академика Горимира Горимировича Чёрного (1923–2012), а также дан обзор некоторых результатов, полученных к настоящему времени в развитие его работ в области аналитического исследования динамики ударных волн в неоднородных средах, определения оптимальной формы тел в сверхзвуковом потоке, экзотермических течений, теории пограничного слоя, околосзвуковых течений. Воспитанник Московского университета, Г.Г. Чёрный являлся участником Великой Отечественной войны, после ее окончания сыграл выдающуюся роль в развитии многих направлений науки, организации научных исследований, воспитании научных кадров. Он выступил одним из создателей НИИ механики МГУ, занимал руководящие должности в научных и учебных учреждениях, создал научную школу в области механики. Исследования Г.Г. Чёрного в основном относились к газодинамике больших скоростей. Им были выполнены аналитические исследования тонких вопросов расчета течений в различных условиях и устройствах. Многие из полученных им результатов стали классическими.

*Ключевые слова:* Великая Отечественная война, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, аэромеханика, газовая динамика, асимптотические разложения, ударные волны, неоднородные газовые среды, горение, детонация, экзотермические течения, оптимальное тело

*Для цитирования:* Богданов А.Н. Мой Г.Г. Чёрный. Путь солдата. Некоторые задачи аэромеханики и газовой динамики в XX в. Классика аналитики // Вестник РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика». 2021. № 1. С. 81–105. DOI: 10.28995/2686-679X-2021-1-81-105

---

© Богданов А.Н., 2021

My G.G. Cherny. Soldier's path.  
Some problems of aeromechanics and gas dynamics  
in the 20<sup>th</sup> century. Analytics classic

Andrei N. Bogdanov  
*Lomonosov Moscow State University,*  
*bogdanov@imec.msu.ru*

*Abstract.* The article tells about the life and main directions of scientific research of the outstanding Soviet and Russian scientist in the field of mechanics, Academician Gorimir Gorimirovich Cherny (1923–2012); as well as it gives an overview of some of the results obtained to date in the development of his work in the field of analytical study of the dynamics of shock waves in inhomogeneous media, determining the optimal shape of bodies in a supersonic flow, exothermic flows, boundary layer theory, transonic flows. A graduate of Moscow University, G.G. Cherny was a participant in the Great Patriotic War, after its end he played a big role in the development of many areas of science, the organization of scientific research, the education of scientific personnel. He was one of the founders of the Research Institute of Mechanics at Moscow State University, held managerial positions in scientific and educational institutions, and created a scientific school in the field of mechanics. Research by G.G. Cherny, in the main, referred to high-speed gas dynamics. He carried out analytical studies of the subtle issues of calculating flows in various conditions and devices. Many of his results have become classic.

*Keywords:* Great Patriotic War, Lomonosov Moscow State University, aeromechanics, gas dynamics, asymptotic expansions, shock waves, inhomogeneous gas media, combustion, detonation, exothermic flows, optimal body

*For citation:* Bogdanov, A.N. (2021), “My G.G. Cherny. Soldier's path. Some problems of aeromechanics and gas dynamics in the 20<sup>th</sup> century. Analytics classic”, *RSUH/RGGU Bulletin. “Information Science. Information Security. Mathematics” Series*, no. 1, pp. 81–105, DOI: 10.28995/2686-679X-2021-1-81-105

Течения с большой сверхзвуковой скоростью.  
Что может быть интереснее?

*Горимир Чёрный*



### *Введение*

Выдающийся ученый-механик и педагог Горимир Горимирович Чёрный (1923–2012) принадлежит к поколению советских людей, получивших от новой власти возможность учиться, приобрести специальность и реализоваться в труде. На их долю выпали военные годы, для юношей, встретивших войну 18–20-летними и ставших фронтовиками, – роковые. Вместе с нашей страной, с ее народом прожил эти годы Горимир Чёрный, через горькие испытания поражениями начала войны, отступления, окружения, ранения и гибели сослуживцев, унижения плена и скитаний на оккупированной территории, когда трудно было просто выжить, шел он к радости освобождения, возвращению в действующую армию, участию в боях за свободу Родины, а затем – Европы. После Победы – возвращение в университет, участие в возрождении страны, весомый вклад в становление и расцвет отечественной науки, в воспитание научных кадров...

Автору посчастливилось учиться у Г.Г. Чёрного, слушать курс его лекций по газовой динамике для студентов-старшекурсников (читал он лично, весь год без единого пропуска, четко, ясно, очень содержательно), участвовать в его семинаре, пройти строгий экзаменационный отбор студентом и при поступлении в аспирантуру. Горимир Горимирович был научным руководителем темы, по которой автор работал в Научно-исследовательском институте механики МГУ с 1981 г., это сотрудничество продолжалось до безвремен-

ной кончины Горимира Горимировича 6 ноября 2012 г. В последние годы его жизни автору довелось часто беседовать с Чёрным в его, ставшем теперь мемориальным, кабинете в Институте механики, обсуждая различные научные, историко-научные и жизненные проблемы, участвовать в подготовке к изданию избранных его трудов [Чёрный 2009]. Считаю большой честью, что курировать мемориальный кабинет руководство института доверило мне.

### *Черты к биографии*

Родился будущий ученый в провинции, в старинном городе Каменец-Подольске (ныне – Каменец-Подольский) на западе Украины. Его родители были далеки от науки: чешских кровей отец – сотрудник ВЧК–ОГПУ, мама – из семьи уральских крестьян-ремесленников, но Горимир хотел заниматься наукой с детства. Увлечшись сначала химией, в 10-м классе он начал познавать новый мир науки – механики и зарождавшейся тогда космонавтики, стал активным участником самодеятельного кружка по изучению межпланетных сообщений, выступил с докладом о выводе известной формулы Циолковского (по книге «Занимательная физика» Перельмана). Самостоятельно изучая случайно купленный в магазине сборник «Реактивное движение» ленинградской группы изучения реактивного движения, познакомился, в частности, со статьей С.П. Королева о ракетных ускорителях для самолетов и большой статьей известного ученого в области газовой динамики Ф.И. Франкля о методе расчета сверхзвуковых вихревых течений газа (совершенно не понятой, но увлекшей магией сложных фраз с неизвестными словами и формул с невиданными до того знаками), засел за учебник высшей математики (попроще – для технических вузов), проводил долгие часы за изучением многотомного «Курса физики» Хвольсона. Тогда очень нравились ему слова немецкого инженера-ракетчика Макса Валье:

Кто в лунную ночь не испытывал горячего желания воспарить к звездам и увидеть позади себя свободно висящую в пространстве Землю в виде золотого шара, становящегося всё меньше и меньше и, наконец, исчезающего в мироздании алмазной песчинкой... Мечты! И всё же разве *мало осуществилось в настоящее время из того, что нашим отдаленным предкам когда-то казалось чудесным сном?*

Среднюю школу окончил с отличием и в 1940 г. отправился поступать в Московский государственный университет. Заявление подал на механико-математический факультет. На вопрос, почему выбран именно Московский университет, а не ближе расположен-

ные Киевский или Одесский, ответил, что хочет специализироваться по кафедре аэродинамики (обнаруженной в «Справочнике для поступающих в Московский университет»), которой нет в тех вузах, этого оказалось достаточно. Как отличник учебы был принят в университет без сдачи вступительных экзаменов, через собеседование.

Учился упорно и увлеченно. Но лишь год московской жизни, с ее музеями, театрами, улицами, Выставкой достижений народного хозяйства (тогда – ВСХВ) и, конечно, университетом, был отпущен ему: 22 июня 1941 г. начался трагический период жизни советского народа – война. Горимир Чёрный испытал ее тяготы в полной мере. С первых дней июля он – доброволец Московского народного ополчения, рядовой артиллерийского полка 8-й Краснопресненской дивизии. Двигаясь к фронту, вместе с однополчанами строил артиллерийские позиции и другие оборонительные сооружения. Первые дни октября – начало немецкой операции «Тайфун» по захвату Москвы, тяжелейшие бои, глубоко запавшие в душу мгновения достойного отпора:

Здесь, на опушке леса, после двух дней, полных ужаса и отчаяния от бесчисленных смертей вокруг, от сознания беды и бессилия предотвратить ее, я испытал состояние, которое, пожалуй, за все последующее время на войне мне не пришлось испытать вновь. <...> немцы начали вытягиваться из деревни справа от нас. Автомшины с солдатами, колесно-гусеничные тягачи с прицепленными орудиями выползали на дорогу огромной шевелящейся темно-серой змеей. <...> Мы не открывали огонь, пока эта змея не сделалась длинной-длинной и ее голова оказалась как раз напротив нас. Помню дрожь в руках, когда я, глядя в панораму прицела, вращал рукоятки, наводя орудие на цель. Замковый – студент-историк Григорий Витухновский, черноволосый, в очках с круглыми стеклами в чёрной оправе, в надвинутой на большие уши пилотке, нервно то выпрямлялся, то приседал на своем месте, все остальные номера застыли в ожидании команды. <...> И вот – выстрел. Я снова прильнул глазом к панораме: перелет. Меняю прицел, Витухновский уже успел зарядить орудие. И свершилось: разрыв посреди колонны. Неопишимо это чувство восторга, смешанного с испуганной злобой, вот вам – получайте, гады! Скорей, скорей еще раз. Почему Витухновский так медлит? «Что ж ты?» – ору во все горло. А он не виноват: у нас снаряд не унитарный, замок не автоматический. Замковому замку открыть надо, заряжающему снаряд вставить (а в нем чуть ли не пуд!), заряд с порохом вложить, потом замковый замок закроет и только тогда – выстрел. И все-таки пусть не так часто, как хочу, еще выстрел, и еще, и еще. И все куда надо. <...> Много пришлось мне впоследствии сделать орудийных выстрелов и почти все – прямой

наводкой. Так что видел, что творю. Но чувство, испытанное в том бою, не повторилось. Вероятно, потому, что тогда оно было первым после такой безысходной подавленности [Чёрный 2010].

Страшный разгром наших войск под Ельней и Вязьмой, окружение, трагические дни выхода из него. Кровавая Московская битва, наступление, опять окружение и полный разгром почти в том же месте – под Вязьмой в конце марта 1942 г. Тяжелейшая контузия, немецкий плен, а после побега – долгое пребывание на оккупированной немцами территории Украины.

Все страшные годы войны для всех нас главной мечтой была Победа, а для меня – и возвращение к учебе в родном университете. Я выживал – и выжил! Месяцы многоверстных и многотрудных скитаний, неудавшиеся попытки выхода к своим, два попадания в пересыльные лагеря для военнопленных Красной Армии, два побега из них [Чёрный 2010].

Проверка в СМЕРШе и третий период военной эпопеи – с начала марта 1944 до Победы 9 мая 1945 г.

В запасном полку поздней осенью 1945 г. в ожидании увольнения из армии военнослужащих – бывших студентов он составил весьма амбициозный план предстоящей учебы. Чего только в нем не было! И механико-математический факультет университета, и, параллельно, самолетостроительный факультет Московского авиационного института, и посещение лекций на физическом, химическом, философском, историческом факультетах МГУ, и иностранные языки, и стенография, и длинный-предлинный список биографий знаменитых людей прошлого, которые нужно изучить, и много чего еще. Чтобы не потерять время, демобилизовавшись, не стал дожидаться отправки очередного эшелона, а поехал самостоятельно, значительную часть пути на крыше вагона, чуть не околел от холода, в Москву. 17 ноября был зачислен на второй курс механико-математического факультета, а уже 3 декабря досрочно сдал первый экзамен зимней сессии, по астрономии, дальше, в таком же темпе, – все остальные. Дипломную работу «Движение газа в пограничном слое при наличии поверхности разрыва» выполнил под руководством Л.И. Седова. В основу диплома легла выполненная еще на четвертом курсе работа (впоследствии он считал ее одним из лучших своих научных достижений, она же составила существенную часть докторской диссертации, защищенной в 1956 г. на механико-математическом факультете МГУ). В 1949 г. с отличием окончил механико-математический факультет МГУ, преодолев все трудности и беды, препятствующие этому (рис. 1).



1945 г.



1949 г.

*Рис. 1. Г.Г. Чёрный. Мехмат, до и после.*

Решающую роль в научной судьбе Г.Г. Чёрного сыграл Л.И. Седов, спокойно посоветовавший по окончании учебы продолжить работу в ЦИАМ, и лишь почти пятьдесят лет спустя Черный узнал, каких беспрецедентных усилий стоило Леониду Ивановичу в то время оставить на постоянной работе в системе ЦИАМ бывшего военнопленного. Седов добился личного приема у заместителя министра по кадрам и дал письменное (!) обязательство нести ответственность за все его действия. Леонид Иванович очень внимательно следил за продвижением порученной своему ученику работы, он ежедневно (!) приглашал Чёрного к себе в кабинет и расспрашивал о сделанном за день.

Первые научные исследования, выполненные Г.Г. Чёрным в ЦИАМ, связаны с разработкой простых («инженерных») моделей течения газа в различных устройствах. Среди рассмотренных им задач закрученные течения сжимаемого газа, движение в пограничном слое при наличии поверхности разрыва, течения чистого пара в сверхзвуковых соплах, сверхзвуковое обтекание близкого к клину профиля, взаимодействие сверхзвукового потока газа с ограничивающим его дозвуковым течением, возникновение и форма поверхностей разрыва в потоках газа, влияние дозвуковой части пограничного слоя на положение скачка уплотнения, а вязкости и теплопроводности – на течение газа за сильно искривленной ударной волной, условия существования прямолинейной линии перехода в транзвуковом сопле и другие вопросы. Результаты первых двадцати лет научной деятельности Г.Г. Чёрного и возглавляемой им лаборатории газовой динамики ЦИАМ составили двухтомный

сборник статей [Крайко, Ватажин, Секундов 2005]; большинство авторов – ученики Г.Г. Чёрного и ученики его учеников.

В 1960 г. Г.Г. Чёрный возглавил Институт механики МГУ. В институте была создана мощная экспериментальная база по всем направлениям механики, включающая комплекс ударных и до-, сверх- и гиперзвуковых аэродинамических труб (при создании был учтен опыт и передовые достижения ЦАГИ и ЦНИИмаш), уникальную гидротрубу, гидроканал, вакуумный бассейн, баллистические трассы, взрывные камеры, стенды испытаний и т. д. Умелое сочетание экспериментальных данных с теорией размерности и подобия позволяло получать результаты для различных задач в широком диапазоне параметров (например, смоделировать и рассчитать подводный старт ракеты с глубины до 200 метров!).

Служение Чёрного на посту директора продолжалось 31 год 3 месяца 28 дней.

По своему складу Г.Г. Чёрный был ученым аналитического научного метода. В век стремительного развития ЭВМ и кажущегося их повсеместного торжества он открывал красоту, изящество и великий смысл аналитических решений задач механики. В 1982/1983 учебном году на лекции для студентов-четверокурсников Г.Г. Чёрный обмолвился, что в докомпьютерную пору задачи решались быстрее: теперь же очень много времени уходит на то, чтобы объяснить программисту, что требуется сделать. В отношении «критерия истины» – эксперимента – приведем слова В.Я. Нейланда: «Уяснение соответствующей природе явления теоретической модели позволяет провести единственную кривую истинной зависимости по звездному небу данных многочисленных экспериментов».

Основные научные интересы Г.Г. Чёрного относились к течениям газа с большими скоростями.

### *1. Метод малого параметра*

Существенный прогресс в развитии теории гиперзвукового обтекания тел был достигнут благодаря предложенной Чёрным в середине 1950-х годов теории сильно уплотненного пограничного слоя (ударного слоя) [Чёрный 1959].

Асимптотические методы и методы малых возмущений показали свою эффективность при исследовании задач механики жидкости и газа [Коул 1972]. Действуя решительно, можно получить решение в подчас очень сложной задаче. Физическая природа малого параметра может быть очень различна. Предложенная Г.Г. Чёрным теория базировалась на введении малого параметра – отношения



плотностей газа перед и за ударной волной и использования асимптотических методов анализа определяющей системы уравнений.

Показателен сам путь прихода Г.Г. Чёрного к этой идее:

Я видел сходство <...> задачи о гиперзвуковом обтекании тел, но мне не приходило на ум, что же служит малым параметром такой задачи. Почему-то, и это труднообъяснимо, я не связал свои размышления на эту тему с известной мне работой Буземана, где он рассматривал предельную модель бесконечно тонкого и соответственно бесконечно плотного слоя между ударной волной и поверхностью обтекаемого тела. И лишь когда мы уехали с женой и трехлетней дочерью в летний отпуск в Гагры, оторвались от всех дел и загорали на пляже, меня однажды словно пронзила внезапная мысль: как же я раньше не додумался, что малым параметром новой задачи служит отношение характерных значений плотности газа перед ударной волной и в сжатом слое за ней. А формула Буземана для давления – есть главный член соответствующего асимптотического разложения! Дальнейшее было, как говорится, делом техники [Чёрный 2009].

Формула Буземана имеет довольно нетривиальный вид [Чёрный 1959], связывающий давление газа  $p$  у поверхности  $S$  обтекаемого тела ( $\rho$ ,  $V$  – плотность набегающего потока, его скорость)

$$p = \rho V^2 \left( \sin^2 \alpha + \sin \alpha \frac{d\alpha}{dS} \int_{S_0}^S \cos \alpha dS \right), \quad (1.1)$$

и требуется глубокое вхождение в тему, чтобы увидеть ее приложение к решению задач аэродинамики. При определенных условиях формула (1.1) допускает упрощение, но границы применения этих упрощений нужно понимать.

## 2. Экзотермические течения

С середины 1950-х годов появляются публикации Г.Г. Чёрного по вопросам горения и детонации. Им рассмотрены течение газа в трубе при наличии фронта пламени, обтекание тел сверхзвуковым потоком детонирующего газа, возникновение колебаний при ослаблении волн детонации. В 1980-х годах он с единой точки зрения сделал несколько аналитических обзоров результатов теоретических и экспериментальных исследований в их связи с различными приложениями (детонация и горение, светодетонационные волны, термоядерная детонация, волны кристаллизации и полимеризации). Г.Г. Чёрный возглавлял исследования возможности управле-

ния аэродинамическими характеристиками тел подводом энергии к обтекающему их сверхзвуковому потоку.

Аналитическое исследование стационарных экзотермических течений можно проводить, используя асимптотические разложения по малому параметру, выбрав за него обусловленное тепловыделением малое отклонение текущего значения числа Маха от единицы. Возможность введения малого параметра, таким образом, подсказывается анализом явления, известного как «тепловой кризис» (запирание потока) [Чёрный 1988]. Система уравнений одномерного стационарного течения газа при подводом энергии имеет решение не при всех значениях  $x$ . Подвод энергии вызывает ускорение дозвукового потока и замедление сверхзвукового до тех пор, пока текущее число Маха не достигнет значения 1. Дальнейший подвод делает невозможным непрерывное стационарное течение, это явление известно как «тепловой кризис».

Уравнения стационарного течения с теплоподводом  $q$  имеют вид

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0, \quad \rho u M_0^2 \frac{d}{dx} u + \frac{d}{dx} p = 0, \quad u \frac{d}{dx} p - a^2 u \frac{d}{dx} \rho = q. \quad (2.1)$$

Здесь и ниже используются обычно принятые обозначения:  $\rho$  – плотность,  $u$  – скорость,  $p$  – давление газа,  $a$  – скорость звука,  $M_0$  – характерное число Маха потока, для скорости звука в обычной газовой динамике используется зависимость  $a = \sqrt{\gamma p / \rho}$ ,  $\gamma$  – показатель адиабаты.

Система (2.1) позволяет выразить

$$\frac{d}{dx} u = \frac{q}{u(u M_0^2 (\gamma + 1) - 1 - \gamma M_0^2)}, \quad M^2 - 1 = \frac{u M_0^2 (\gamma + 1) - 1 - \gamma M_0^2}{\gamma M_0^2 - \gamma u M_0^2 + 1}. \quad (2.2)$$

По (2.2) можно рассчитать предельное, при  $M \rightarrow 1$ , значение  $u$

$$u^* = \frac{1 + \gamma M_0^2}{(\gamma + 1) M_0^2}. \quad (2.3)$$

Для обычных газов, например воздуха,  $\gamma = 1,4$ . В этом случае изменение безразмерной скорости сверхзвукового течения от  $\frac{\gamma}{\gamma + 1} \approx 0,58$  до 1, что позволяет говорить о малости относительного изменения параметров стационарного сверхзвукового одномер-

ного потока с тепловыделением (для дозвукового режима относительные изменения не столь ограничены, но метод применять можно, оговорив значение  $M_0^2$  не слишком малым).

Метод позволяет исследовать качественное влияние теплоподвода на характеристики газодинамических течений, а в ряде задач получить качественно принципиально новые результаты по сравнению с классической газовой динамикой обычных сред.

Организуя тепловыделение в окружающей тело среде, можно изменять его аэродинамические характеристики [Георгиевский, Левин 2003].

Рассмотрим частный случай тепловыделения по экспоненциальному закону так, что

$$u = 1 + \varepsilon u_{10}, \quad u_{10} = \exp(-\sigma x) - 1, \quad (2.4)$$

$\sigma$  – характеризующий тепловыделение параметр,  $\varepsilon \ll 1$ . По (2.4) видно, что  $u_{10}$  – отрицательная величина, увеличивающаяся по абсолютному значению вниз по потоку, следовательно, скорость потока  $u$  уменьшается.

Сопrotивление  $X_0$  тела, вычисленное для обычной среды, уточняется добавочным слагаемым  $X_1$  из-за переменности параметров течения. Теплоподвод в сверхзвуковом течении вызывает рост давления и плотности вниз по потоку, поэтому могут быть созданы условия, когда обтекаемое экзотермической средой тело будет испытывать тягу:  $X_1 > X_0$ . Так, например, для тонкого осесимметричного остроконечного тела имеем [Богданов 1991]

$$X = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^x S''(\xi) S''(x) \ln(x - \xi) d\xi dx - \int_0^1 u_{10} S'(x) dx.$$

Появляется поперечная сила, для тонкого остроконечного осесимметричного тела вращения при малых углах атаки  $\alpha$  она имеет вид

$$N = \alpha \int_0^1 u_{10}(x) Y(x) dx. \quad (2.5)$$

Таким образом, без принятия специальных мер по стабилизации движения в экзотермической среде отклонение, приводящее к возникновению угла атаки у движущегося тела, приведет к опрокидыванию тела [Богданов, Куликовский 1993]. Причиной будет воздействие поперечной силы (2.5), отсутствующей для таких тел в обычных условиях.

### 3. Оптимальные тела

В конце 1950-х гг. Г.Г. Чёрный и его ученик А.Л. Гонор обратились к проблеме определения формы тела наименьшего сопротивления (оптимальных) при больших сверхзвуковых скоростях. Решение такого рода задач встретило значительные математические трудности и потребовало большого искусства для нахождения эффективного решения.

В начале 1960-х годов в приближенной постановке с использованием закона сопротивления Ньютона А.Л. Гонором и Г.Г. Чёрным были определены первые пространственные формы тел минимального волнового сопротивления.

В 1969 г. под редакцией А.Л. Гонора был выполнен перевод на русский язык первой в мировой научной литературе монографии [Миеле 1969], в которой были представлены основные результаты решения вариационных задач сверх- и гиперзвуковой газовой динамики. Г.Г. Чёрный и А.Л. Гонор вошли в число соавторов монографии. А.Л. Гонором и другим учеником Г.Г. Чёрного – А.Н. Крайко – был восполнен не получивший должного освещения вклад в эти разделы газовой динамики советских ученых. Значительное развитие в работах школы Г.Г. Чёрного получили исследования интересного класса оптимальных тел – так называемых звездообразных тел, здесь не обсуждаемых.

Влияние физико-химических процессов в задачах оптимизации в монографии А. Миеле не затрагивалось. Между тем тело, обладающее минимальным волновым сопротивлением, в экзотермической среде имеет качественно иную форму, нежели в обычной газовой динамике [Миеле 1969] или в эндотермической среде (например, релаксирующей с поглощением энергии) [Ткаленко 1969], что объясняется иным режимом развития вызываемых движением тела возмущений среды.

Обычно при решении такой задачи оптимизации выбирают одно из тел, удовлетворяющих условиям:

- замкнутость контура тела с поперечным сечением  $S$

$$S(0) = S(1) = 0, \text{ или } \int_0^1 S'(\xi) d\xi = 0; \quad (3.1)$$

- постоянство объема

$$V \equiv \int_0^1 S(\xi) d\xi = const. \quad (3.2)$$

В классической газовой динамике форма (площадь поперечного сечения) оптимального тела в классе тонких осесимметричных

остроконечных тел при выполнении условий (3.1)–(3.2) была рассчитана Сирсом и Хааком (рис. 2) [Миеле 1969].

$$S^0(x) = \frac{128}{3\pi} V[x(1-x)]^{3/2} \tag{3.3}$$



Рис. 2. Тело Сирса–Хаака (3.3)

В экзотермической среде при слабом тепловыделении оптимальное тело из класса подобных тел определяется формулой [Богданов 1991]

$$S(x) = S^0(x) - \frac{\sigma}{16} \left( \frac{4y+10}{3} (\sqrt{(1-y)y})^3 + 3(1-y) \left( \sqrt{(1-y)y} - \frac{1}{2} \arcsin(2y-1) - \frac{\pi}{4} \right) \right) \tag{3.4}$$

$\sigma$  – параметр, характеризующий тепловклад в поток (рис. 3).

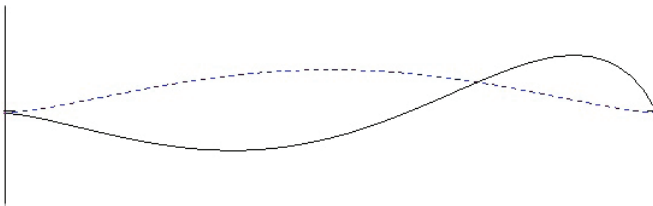


Рис. 3. Качественное сопоставление контура тела Сирса–Хаака (3.3) (штриховая линия) и поправочного слагаемого от тепловклада (3.4) (сплошная линия)

Расчеты по формуле (3.4) показывают, что оптимальное тело в потоке с тепловыделением имеет более тонкую переднюю часть и утолщенную заднюю, что объясняется ростом давления вниз по потоку из-за теплоподвода, а также необходимостью избежать чрезмерного усиления производимых головной частью тела возмущений среды.

#### 4. Динамика ударных волн

В 1960-е гг. Г.Г. Чёрным в соавторстве с его учеником В.А. Левиным были установлены асимптотические законы поведения детонационных волн [Левин, Чёрный 1967].

Исследование поведения ударных волн в газовых средах относится к числу весьма актуальных, в связи с приложениями, задач [Гласс 1977]. Постановки задач для исследования процессов такого рода являются классическими [Седов 1981], а для неоднородных сред – их естественным развитием.

Сложность исследования динамики ударных волн в неоднородных средах в общем случае первоначально определила путь поиска исследователями частных решений в определенном виде условиях. Для некоторых видов стратификации плотности перед фронтом ударной волны удалось получить автомодельные решения [Сакураи 1960, Хайес 1968]. Замечательно простые зависимости скорости ударной волны от значения плотности перед ней (профиль стратификации мог быть совершенно произвольным) для сильных ударных волн были найдены Дж. Уиземом [Уизем 1977]. Хотя эти результаты оказались довольно близки к ранее найденным автомодельным, *оригинальность способа получения* зависимости скорости возмущения от параметров среды оставляла вопросы (признаваемые и их автором – Уиземом) о справедливости полученных результатов.

Автором настоящей статьи был предложен [Богданов 2020] аналитический подход к получению решения задачи без ограничения на интенсивность ударной волны.

Предлагаемый метод основан на интегрировании малых отклонений параметров процесса как откликов на малые изменения параметров среды перед фронтом волны. В простейшем случае входящую в стратифицированную область ударную волну можно считать плоской, а стратификацию – одномерной в направлении распространения волны, притом, что изменяются только плотность и температура, давление постоянно, а среда покоится

$$\rho_0 = \rho_0(x), T_0 = T_0(x), p_0 = const, u_0 = 0.$$

Будем рассматривать стратификацию плотности как последовательность тонких параллельных фронту ударной волны слоев, в каждом из которых изменение плотности мало. В этом случае в каждом тонком слое можно представить изменение параметров исследуемого процесса при прохождении ударной волной стратифицированной области в виде ряда по малому параметру – отклику на малое изменение плотности в слое  $\delta\rho_0(x)$

$$D = D(0) + \delta D(x) + \delta^2 D(x) + \dots, p_1 = p_1(0) + \delta p_1(x) + \delta^2 p_1(x) + \dots, \quad (4.1)$$

$$\rho_1 = \rho_1(0) + \delta \rho_1(x) + \delta^2 \rho_1(x) + \dots, u_1 = u_1(0) + \delta u_1(x) + \delta^2 u_1(x) + \dots$$

Подставив ряды (4.1) в соотношения на фронте плоской ударной волны [Черный 1959]

$$\begin{aligned} \rho_0 D &= \rho_1 (D - u_1), \rho_0 = \rho_1 - \rho_0 D u_1, \\ \frac{P_0}{\gamma - 1} D &= \rho_0 D \left( \frac{P_1}{(\gamma - 1) \rho_1} + \frac{1}{2} u^2 \right) - p_1 u_1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

для членов первого порядка малости по  $\delta$  получим:

$$\begin{aligned} \delta \rho_0 D + \rho_0 \delta D &= \delta \rho_1 (D - u_1) + \rho_1 (\delta D - \delta u_1), \\ 0 &= \delta \rho_1 (D - u_1) u_1 + \rho_1 u_1 (\delta D - \delta u_1) + \rho_1 (D - u_1) \delta u_1 - \delta p_1 \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{P_0}{\gamma - 1} \delta D &= \frac{1}{2} \delta \rho_1 (D - u_1) u_1^2 + (\delta D - \delta u_1) \left( \frac{1}{2} \rho_1 u_1^2 + \frac{P_1}{\gamma - 1} \right) + \rho_1 (D - u_1) u_1 \delta u_1 - \\ &\quad - \delta \rho_1 u_1 - \rho_1 \delta u_1, \end{aligned}$$

а дополнительное соотношение для замыкания системы – из системы уравнений возмущенного течения за фронтом ударной волны

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \delta \rho_1 + u_1 \frac{\partial}{\partial x} \delta \rho_1 + \rho_1 \frac{\partial}{\partial t} \delta u_1 &= 0, \quad \rho_1 \left( \frac{\partial}{\partial t} \delta u_1 + u_1 \frac{\partial}{\partial x} \delta u_1 \right) + \frac{\partial}{\partial t} \delta p_1 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \delta p_1 + u_1 \frac{\partial}{\partial x} \delta p_1 + a_1^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \delta \rho_1 + u_1 \frac{\partial}{\partial x} \delta \rho_1 \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Система (4.4) описывает два акустических возмущения, распространяющихся от фронта ударной волны и к нему. Если принять, что приходящие на фронт ударной волны сзади возмущения такого порядка отсутствуют, то имеет место связь

$$\delta \rho_1 = -\rho_1 a_1 \delta u_1. \quad (4.5)$$

Разрешая систему (4.3) – (4.5), можно получить

$$\frac{\delta D(x)}{D} = - \frac{a_1 - \frac{\gamma-1}{2} u_1}{D + a_1 - \frac{\gamma-1}{2} u_1} \frac{\delta \rho_0(x)}{\rho_0}. \quad (4.6)$$

Разделив обе части уравнения (4.6) на малое приращение координаты  $\delta x$  и переходя к пределу при  $\delta x \rightarrow 0$ , получим дифференциальную связь скорости ударной волны и значения плотности перед ее фронтом

$$\frac{1}{D} \frac{dD}{dx} = \beta \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dx}, \quad \beta = - \frac{a_1 - \frac{\gamma-1}{2} u_1}{D + a_1 - \frac{\gamma-1}{2} u_1}. \quad (4.7)$$

Параметры течения  $u_1, a_1$  определяются по соотношениям (4.2), и есть функции  $D, \rho_0$  – итак, уравнение (4.7) есть неявная зависимость  $D = D(\rho_0)$ .

Для ударных волн большой интенсивности уравнение (4.7) существенно упрощается, поскольку в этом случае коэффициент  $\beta$  в дифференциальной связи (4.7) есть постоянная величина  $\beta = - \frac{1}{2 + \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}}$  и (4.7) легко интегрируется

$$\frac{D(x)}{D(0)} = \left( \frac{\rho_0(x)}{\rho_0(0)} \right)^\beta, \quad (4.8)$$

здесь  $D(0), \rho_0(0)$  – начальные данные задачи (скорость ударной волны и плотность перед ее фронтом до входа в область стратификации). При  $\gamma = 1,4, \beta \approx -0,21525$ .

Для слабых ударных волн ( $D \rightarrow a$ )  $\beta$  также стремится к постоянной величине (равной 0,5). И в этом случае имеет место зависимость (4.8) с  $\beta = -0,5$ .

Поскольку коэффициент  $\beta$  отрицателен при любых значениях определяющих его величин  $D, u_1, a_1$ , то по зависимости (4.7) видно, что, входя в область пониженной плотности, ударная волна ускоряется, а в среду с повышенной плотностью – замедляется.

Недостатком полученных зависимостей (4.7), (4.8) является то обстоятельство, что ударная волна «забывает» пересечение стратифицированных областей, как только значение плотности перед ее фронтом принимает первоначальное значение  $\rho_0(0)$ . Это следствие того, что в основе вывода зависимости (4.7) лежит учёт



только локального отклика движения ударной волны на изменение плотности перед ее фронтом.

Для расчета изменения интенсивности ударной при прохождении слоев стратификации вычислим член второго порядка малости разложения для скорости ударной волны (4.1)

$$\delta^2 D = -\frac{\gamma-1}{\rho_0 u \left( D + a - \frac{\gamma-1}{2} u \right)} \left[ \frac{a^2}{\gamma(\gamma-1)} A + \left( u - \frac{a}{\gamma-1} \right) B + C - I \left( D - \frac{a+u}{\gamma-1} \right) \right] \quad (4.9)$$

здесь

$$A = \delta\rho(\delta D - \delta u) - \delta\rho_0\delta D, \quad B = -\delta\rho_0(u\delta D + D\delta u) - \rho_0\delta D\delta u, \\ C = (\delta\rho_0 D + \rho_0\delta D) \left( u\delta u + \frac{\delta p}{(\gamma-1)\rho} - \frac{p}{(\gamma-1)\rho} \frac{\delta\rho}{\rho} \right) + \delta\rho_0\delta D \left( \frac{p}{(\gamma-1)\rho} + \frac{1}{2}u^2 \right) - \\ - \delta p\delta u, \quad I = \int_0^L Q dx.$$

Для сильных ударных волн выражение (4.9) упрощается:

$$\delta^2 D = 4\beta(1+2\beta) \frac{\gamma-1}{2+\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}} \left( \frac{\delta\rho_0}{\rho_0} \right)^2 D - \\ - (1+\beta)\beta \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \left( \gamma^2 - \sqrt{2\gamma(\gamma-1)} - 3 \right) \frac{1}{D\rho_0} \int_0^L D\delta\rho_0 \left( D \frac{\delta\rho_0}{\rho_0} \right) dx, \quad (4.10)$$

штрихом отмечено дифференцирование функции по ее аргументу.

Поскольку для сильных волн  $\beta \approx -0,2$ , первое слагаемое в (4.10) отрицательно, локальные эффекты ослабляют ударную волну. Вклад же от интегральных членов может быть отрицательным, положительным, нулевым в зависимости от конкретного вида профиля стратификации. Таким образом, изменение интенсивности ударной волны на слоях стратификации определяется не только локальными, но и интегральными эффектами, последние по мере прохождения стратифицированного слоя могут становиться все более весомыми.

Но и только ли этими воздействиями определяется исследуемый процесс?

Рассмотрим эту задачу, используя теорию распада произвольного разрыва [Кочин 1949], представив слой стратификации облас-

тью постоянной плотности, приняв за нее максимальное отклонение плотности в слое от начального значения.

Распад разрыва будет происходить по-разному, в зависимости от того, большую или меньшую плотность по сравнению с исходной имеет среда, в которую вышла ударная волна. В первом случае назад в исходную среду отражается ударная волна, и задача описывается соотношениями на трех ударных волнах: прошедшей, исходной и отраженной, во втором – отраженная волна есть волна разрежения, и вместо соотношений на отраженной волне следует использовать соотношения на волне Римана и уравнение адиабатического состояния газа.

Рассмотрим первый случай и для простоты для части процесса ограничимся приближением для сильных ударных волн. Имеем:

- на падающей ударной волне

$$\rho_1 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_0(0), \quad u_1 = \frac{2}{\gamma+1} D_0, \quad p_1 = \frac{2}{\gamma+1} \rho_0(0) D_0^2;$$

- на прошедшей в область стратификации ударной волне

$$\rho_3 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_0, \quad u_3 = \frac{2}{\gamma+1} D, \quad p_3 = \frac{2}{\gamma+1} \rho_0 D^2;$$

- на отраженной ударной волне используем условия на разрыве в полной форме

$$\rho_2 = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2+2} \rho_1, \quad u_2 = 2a_1 \frac{M_1^2-1}{(\gamma+1)M_1} + u_1, \quad p_2 = \frac{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1}{\gamma+1} p_1,$$

$$M_1 = \frac{D_1 - u_1}{a_1};$$

- на разделяющем области за прошедшей и отраженной ударными волнами контактном разрыве

$$u_2 = u_3, p_2 = p_3, \rho_2 \neq \rho_3.$$

Разрешая эту систему соотношений, получим уравнение для скорости прошедшей ударной волны

$$\frac{\rho_0}{\rho_0(0)} \left( \frac{D}{D_0} \right)^2 + \frac{\gamma-2}{\gamma+1} - \frac{1}{2\gamma\sqrt{\gamma-1}} \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_0(0)} \left( \frac{D}{D_0} \right)^2 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left( \frac{D}{D_0} - 1 \right)} = 0. \quad (4.11)$$

При  $\frac{\rho_0}{\rho_0(0)} \rightarrow 1$   $\left( \frac{D}{D_0} \rightarrow 1 \right)$  из (4.11) имеем  $D = \frac{2-\gamma}{\gamma+1} D_0 \sqrt{\frac{\rho_0(0)}{\rho_0}}$ , что качественно совпадает с (4.8) для слабых волн.

При  $\rho_0 \gg \rho_0(0)$  вариант (4.8) с  $\beta \approx -0,2$  уже не удовлетворяет (4.11). При сильных изменениях (уменьшении) скорости ( $D \ll D_0$ ) формула (4.11) опять дает  $D \sim \rho_0^{-1/2}$ , что почти на три порядка отличается от варианта (4.8) с  $\beta \approx -0,2$ . Таким образом, влияние стратификации на динамику ударной волны намного существеннее, чем это следовало бы из линейной теории.

Таким образом, эволюция ударных волн в неоднородной среде не только определяется локальными и интегральными факторами, но и является принципиально нелинейным процессом. Падение ударной волны на слой повышенной плотности является принципиально другой задачей, нежели отражение волны от слоя пониженной плотности. В то же время следует отметить принципиальное отличие процесса отражения ударной волны от границы двух сред от прогрессии ударной волны через стратифицированный слой, определяемой интегральными воздействиями из-за взаимодействия ударной волны с локальными возмущениями, хотя и приходящими на фронт ударной волны сзади, но порожденными самой исследуемой волной в такой среде.

### *Школа Г.Г. Чёрного*

Преподавательская работа Г.Г. Чёрного началась в 1951 г. Он стал читать курс газовой динамики в МФТИ, сменив по его просьбе М.В. Келдыша, с 1953 г. преподавал в Московском университете (доцент, с 1958 г. – профессор). В 1988 г., после кончины академика Г.И. Петрова, возглавил кафедру аэромеханики и газовой динамики МГУ. В том же году вышел в свет учебник для вузов «Газовая динамика» [Чёрный 1988]. В 1994 г. ему присвоено звание заслуженного профессора Московского университета.

При всей своей загруженности Г.Г. Чёрный находил время для общения со студентами, более того, он был для них доступен. По мере их научного «взросления» и перехода в статус аспирантов, младших научных сотрудников и т. д. доступность значительно уменьшалась, что, по мнению ученика Горимира Горимировича

В.В. Прокофьева, следует расценивать как педагогический прием – увеличение спроса со взрослеющего исследователя с напутствием: «Учись решать проблемы самостоятельно».

Сам, через Л.И. Седова принадлежавший к крупнейшей московской школе механиков Жуковского–Чаплыгина, Г.Г. Чёрный очень гордился своими учениками, с удовольствием отмечая их новые поколения (рис. 4). Отрадно видеть, что ветвь Н.Е. Жуковский – С.А. Чаплыгин – Л.И. Седов – Г.Г. Чёрный – В.А. Левин – П.Ю. Георгиевский – О.Г. Сутырин продолжается в учениках уже Олега Сутырина.

Созданные Г.Г. Чёрным научные школы активно работают практически во всех областях газовой динамики; наряду с развитием его идей учениками Горимира Горимировича получены интересные и важные результаты в направлениях, которыми он сам непосредственно не занимался: в высокотемпературных газодинамических и многофазных течениях, в теории устойчивости и турбулентности. Интересные примеры сингулярных возмущений были исследованы автором настоящей статьи. В теории нелинейных околорезонансных колебаний теория, учитывающая слабую вязкость и теплопроводность [Богданов 1994], позволила моделировать процесс развившихся колебаний полностью, без привлечения дополнительных соображений («теории площадей» и т. п.) для введения в решение разрывов. В теории нестационарных трансзвуковых течений была показана гиперболическая вырожденность классической модели нестационарного трансзвукового течения [Богданов 1997] (оставлявшая вне исследования ряд важных процессов, присущих течениям такого рода) и предложена регуляризованная модель, преодолевавшая связанные с вырожденностью ограничения. Обзор работ по теории нестационарных пограничных слоев, взаимодействующих на трансзвуковых скоростях, выполнен в работе [Богданов, Диесперов, Жук 2018].

Около четверти века, с 1988 по 2012 г., Г.Г. Чёрный возглавлял редколлегию журнала «Известия РАН. Механика жидкости и газа», многие годы он был членом редколлегий журналов «Прикладная математика и механика», «Доклады РАН» и «Реферативный журнал Механика». Он находил время обратиться к потенциальным корреспондентам с ободряющим письменным приглашением к сотрудничеству, позвонить автору и сообщить о приеме его статьи в печать, высказать рекомендации по выбору журнала и т. д. В конце 2001 – начале 2002 г. Г.Г. Чёрному удалось организовать два новых журнала: «Аэромеханика и газовая динамика» и «Успехи механики», существенно расширивших и по количеству, и по качеству возможности публикации статей, в том числе и научно-исторической

направленности. К сожалению, просуществовали эти журналы недолго.

Личность Г.Г. Чёрного имела яркие запоминающиеся черты Учителя. Он обладал редким качеством воспитывать собственным примером, а не словами поучения. Гармонизирующее влияние на окружающих оказывала его деликатность, дисциплинирующее – четкость. Будучи руководителем общеинститутского научного семинара, Г.Г. Чёрный никогда не позволял себе говорить повышено эмоционально, что свойственно некоторым ученым. Жизненным кредо Г.Г. Чёрного было учиться самому, в том числе и у своих учеников [Чёрный 1988].



*Рис. 4. С Л.И. Седовым (второй слева)  
во время зарубежного визита*

Написанные им несколько книг воспоминаний предельно откровенны, в том числе и по отношению к самому себе... Эти книги получили высокую оценку читателей, в том числе в кругах профессиональных литераторов, избравших его в члены Союза писателей России.

### *Заключение*

Отстояв в военные годы Отчизну, люди того поколения считали своим долгом по окончании войны самоотверженно работать и в науке. Судьба их показательна (об академике Л.В. Овсянникове см.: [Богданов 2019]).

В последние годы жизни Г.Г. Чёрный много сил и времени уделял борьбе за сохранение роли механики как фундаментальной науки в связи с возникшими в последнее время опасными заблуждениями на этот счет. Выступал с докладами на съездах, конференциях, совещаниях, перед школьниками в подшефной школе. Подготовил фундаментальный доклад «Слово о вечно новой механике» (опубликованный в журнале «Квант» и в виде отдельной монографии) и сделал его в Политехническом музее в Москве по программе «Трибуна Академии наук в Политехническом». В своих выступлениях он доказывал важные истины:

- механика является научной основой большинства, если не всех, областей техники;
- использование научных достижений фундаментальных наук – физики, химии, биологии для нужд общества абсолютно невозможно без опоры на традиционные и новейшие результаты механики;
- умаление места и роли механики в ряду фундаментальных наук не то, чтобы совершенно необоснованно, а чрезвычайно вредно и приведет к тяжелым последствиям.

Он умер, отметив 70-летие битвы под Москвой, не дожив чуть менее трех месяцев до своего 90-летия.

### *Благодарности*

Автор выражает признательность редколлегии журнала «Вестник РГГУ» за предоставленную возможность высказать слова благодарности своим наставникам в профессии и в жизни. Автор благодарен С.С. Демидову и Г.И. Синкевич за неизменную поддержку в работе.

В статью вошли результаты работ, выполненных в соответствии с планом исследований НИИ механики МГУ (тема АААА-А19-119012990113-1) при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-01-00793).

### *Acknowledgements*

The author expresses his gratitude to the editorial board of the journal Vestnik RGGU for the opportunity to express gratitude to his mentors in the profession and life. The author is grateful to S.S. Demidov and G.I. Sinkevich for constant support in the work.

The article includes results of the works carried out in accordance with the research plan of the Research Institute of Mechanics of Moscow State University (topic АААА-А19-119012990113-1) with partial financial support from the Russian Foundation for Basic Research (project 18-01-00793).

## Литература

---

- Богданов 1991 – *Богданов А.Н.* Линейные и слабонелинейные возмущения релаксирующего газа: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. МГУ им. Ломоносова. М., 1991.
- Богданов, Куликовский 1993 – *Богданов А.Н., Куликовский В.А.* Обтекание тонкого тела вращения под малым углом атаки стационарным сверхзвуковым потоком колебательно-возбужденного газа // Прикладная механика и техническая физика. 1993. № 3. С. 11.
- Богданов 1994 – *Богданов А.Н.* Моделирование вынужденных релаксационных колебаний газа в канале переменного сечения // Математическое моделирование. 1994. Т. 6. № 1. С. 69–85.
- Богданов 1997 – *Богданов А.Н.* Высшие приближения трансзвукового разложения в задачах нестационарных трансзвуковых течений // Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 798–811.
- Богданов, Диесперов, Жук 2018 – *Богданов А.Н., Диесперов В.Н., Жук В.И.* Неклассические трансзвуковые пограничные слои. К преодолению некоторых тупиковых ситуаций в аэродинамике больших скоростей // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58. № 2. С. 270–280.
- Богданов 2019 – *Богданов А.Н.* Выдающийся воспитанник Московского университета Лев Васильевич Овсянников (1919–2014) и развитие теории околосзвуковых течений газа // Вестник РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика». 2019. № 4. С. 53–74.
- Богданов 2020 – *Богданов А.Н.* Динамика ударных волн в средах с продольной стратификацией // Доклады РАН. 2020. Т. 491. С. 5–6.
- Георгиевский, Левин 2003 – *Георгиевский П.Ю., Левин В.А.* Управление обтеканием различных тел с помощью локализованного подвода энергии в сверхзвуковой набегающий поток // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 5. С. 154–167.
- Гласс 1979 – *Гласс И.И.* Ударные волны и человек. М.: Мир, 1979.
- Кочин 1949 – *Кочин Н.Е.* Собрание сочинений. Т. 2. М.; Л.: Изд. АН СССР, 1949.
- Крайко, Ватажин, Секундов 2005 – *Крайко А.Н., Ватажин А.Б., Секундов А.Н.* Газовая динамика. Избранное. М.: Физматлит, 2005.
- Левин, Чёрный 1967 – *Левин В.А., Чёрный Г.Г.* Асимптотические законы поведения детонационных волн // Прикладная математика и механика. 1967. Т. 31. Вып. 3. С. 393–405.
- Миеле 1969 – Теория оптимальных аэродинамических форм. М.: Мир, 1969.
- Седов 1981 – *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981.
- Ткаленко 1969 – *Ткаленко Р.А.* О тонких телах вращения наименьшего волнового сопротивления в неравновесном сверхзвуковом потоке // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1969. № 6. С. 74–79.
- Уизем 1977 – *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.

- Хейз 1968 – Хейз У. Автомодельные сильные ударные волны в экспоненциальной среде // Механика. 1968. № 6 (112). С. 51–61.
- Чёрный 1959 – Чёрный Г.Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959.
- Чёрный 1988 – Чёрный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988.
- Чёрный 2009 – Чёрный Г.Г. Избранные труды. М.: Наука, 2009.
- Чёрный 2010 – Чёрный Г.Г. Военные годы. СПб.: Любавич, 2010.
- Sakurai 1960 – Sakurai A. On the problem of a shock wave arriving at the edge of a gas // Comm. Pure Appl. Math. 1960. Vol. 13. P. 353–370.

## References

---

- Bogdanov, A.N. (1991), *Lineinye i slabonelineinye vozmushcheniya relaksiruyushchego gaza* [Linear and weakly nonlinear disturbances of a relaxing gas], Ph.D. Thesis, Lomonosov Moscow State University, Moscow, USSR.
- Bogdanov, A.N. and Kulikovskii, V.A. (1993), “Stationary supersonic flow of vibrationally excited gas around a thin body of revolution at a small angle of attack”, *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, no. 3, p. 11.
- Bogdanov, A.N. (1994), “Simulation of forced relaxation oscillations of a gas in a channel with variable cross section”, *Matematicheskoe modelirovanie*, vol. 6, no. 1, pp. 69–85.
- Bogdanov A.N. (1997), “Higher approximations for transonic expansion in problems of unsteady transonic flows”, *Prikladnaya matematika i mekhanika*, vol. 61, no. 5, pp. 798–811.
- Bogdanov, A.N., Diesperov, V.N. and Zhuk V.I. (2018), “Nonclassical transonic boundary layers. To overcoming some dead-end situations in high-speed aerodynamics”, *Zhurnal vychislitelnoi matematiki i matematicheskoi fiziki*, vol. 58, no. 2, pp. 270–280.
- Bogdanov, A.N. (2019), “Lev Vasilievich Ovsyannikov (1919–2014), an outstanding student of Moscow University and the development of the theory of transonic gas flows”, *RSUH/RGGU Bulletin. “Information Science. Information Security. Mathematics” Series*, vol. 4, pp. 53–74.
- Bogdanov, A.N. (2020), “Dynamics of shock waves in media with longitudinal stratification”, *Doklady RAN*, vol. 491, pp. 5–6.
- Cherny, G.G. (1959), *Techeniya gaza s bol'shoi sverkhzvukovoy skorostyu* [Gas flows at high supersonic speed], Fizmatgiz, Moscow, USSR.
- Cherny, G.G. (1988), *Gazovaya dinamika* [Gas dynamics], Nauka, Moscow, USSR.
- Cherny, G.G. (2009), *Izbrannye trudy* [Selected works], Nauka, Moscow, Russia.
- Cherny, G.G. (2010), *Voennye gody* [War years], Lyubavich, Saint Petersburg, Russia.
- Georgievsky, P.Yu. and Levin, V.A. (2003), “Controlling the flow around various bodies by means of a localized supply of energy to the supersonic incident stream”, *Izvestiya RAS. Mekhanika zhidkosti i gaza*, no. 5. pp. 154–167.



- Glass, I.I. (1979), *Shock waves and man*, Mir, Moscow, Russia.
- Hayes, W.D. (1968), "Self-similar strong shocks in an exponential medium", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 32, pp. 305–315.
- Kochin, N.E. (1949), *Sobranie sichineniy* [Collected Works], vol. 2, AN USSR, Moscow, Leningrad, USSR.
- Kraiko, A.N., Vatazhin, A.B. and Secundov, A.N (2005), *Gazovaya dinamika. Izbrannoye* [Gas dynamics. Selected works], vol. 1–2, Fizmatlit, Moscow, Russia.
- Levin, V.A. and Cherny, G.G. (1967), "Asymptotic laws of behavior of detonation waves", *Prikladnaya matematika i mekhanika*, vol. 31, no. 3, pp. 393–405.
- Miele, A. (1969), *Theory of optimum aerodynamic shapes*, Mir, Moscow, Russia.
- Sakurai, A. (1960), "On the problem of a shock wave arriving at the edge of a gas", *Communications on Pure and Applied Mathematics*, no. 13, pp. 353–370.
- Sedov, L.I. (1981), *Metody podobiya i razmernosti v mekhanike* [Similarity and dimensional methods in mechanics], Nauka, Moscow, USSR.
- Tkalenko, R.A. (1969), "On thin bodies of revolution of the least wave resistance in a nonequilibrium supersonic flow", *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza*, no. 6, pp. 74–79.
- Whitham, G.B. (1977), *Linear and Nonlinear Waves*, Mir, Moscow, Russia.

### *Информация об авторе*

*Андрей Н. Богданов*, кандидат физико-математических наук, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия; 119192, Россия, Москва, Мичуринский просп., д. 1; bogdanov@imec.msu.ru

### *Information about the author*

*Andrei N. Bogdanov*, Cand. of Sci. (Physics and Mathematics), Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; bld. 1, Michurinskii Av., Moscow, Russia, 119192; bogdanov@imec.msu.ru

Дизайн обложки

*Е.В. Амосова*

Корректор

*Н.К. Егорова*

Компьютерная верстка

*Н.В. Москвина*

Подписано в печать 24.03.2021.

Формат 60×90<sup>1/16</sup>.

Уч.-изд. л. 6,0. Усл. печ. л. 6,3.

Тираж 1050 экз. Заказ № 1240

Издательский центр  
Российского государственного  
гуманитарного университета  
125993, Москва, Миусская пл., 6

[www.rggu.ru](http://www.rggu.ru)

[www.knigirggu.ru](http://www.knigirggu.ru)